全國公私立高級中學 110 學年度分科測驗第七次聯合模擬考試

數學甲考科解析

考試日期：111 年 5 月 17~18 日

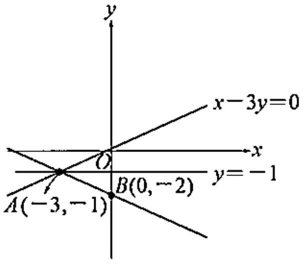
1	2	3	4	5	6	7	8	9-1	9-2	10-1	10-2	10-3	10-4
3	4	5	134	123	23	245	15	5	8	1	7	2	2
10-5	11-1	12	13	14	15	16	17						
4	7	245											

第壹部分：選擇題

一、單選題

1. 由 $\begin{cases} x-3y=0 \\ y+1=0 \end{cases}$ 可得 $A(-3,-1)$，

如下圖，原點 O 關於直線 $y+1=0$ 的對稱點為 $B(0,-2)$

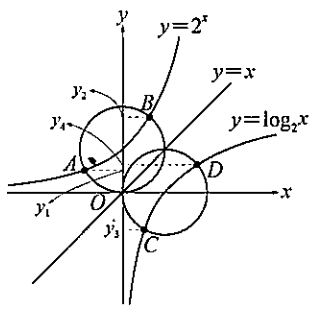


$\Rightarrow \overleftrightarrow{AB}: y-(-2)=\dfrac{-1-(-2)}{-3-0}(x-0)$

$\Rightarrow x+3y+6=0$，

故選(3)。

2.



由題意可作圖如上，則 $y_1<y_2$，$y_3<y_4$，

且 $y_3<y_1<y_4<y_2 \Rightarrow$ 元太對，光彥錯。

又 $\overleftrightarrow{AD}$ 和 $\overleftrightarrow{BC}$ 的交點在 $y=x$ 上，

所以交點的縱坐標與橫坐標相等 $\Rightarrow$ 步美對。

而 A 和 C 與 B 和 D 分別對稱於 $L: y=x$，

所以 $\overleftrightarrow{AC}$ 和 $\overleftrightarrow{BD}$ 皆和 L 垂直，即 $\overleftrightarrow{AC} // \overleftrightarrow{BD} \Rightarrow$ 小哀對。

解 $\begin{cases} (x-1)^2+y^2=1 \\ x^2+(y-1)^2=1 \end{cases} \Rightarrow x=y=0$ 或 1

$\Rightarrow$ 圓 C_1 和圓 C_2 交於 $(0,0)$ 和 $(1,1)$，

所以兩點的距離為 $\sqrt{2} \Rightarrow$ 柯南對。

由以上可知，$k=4$，$m=1 \Rightarrow k-m=3$，

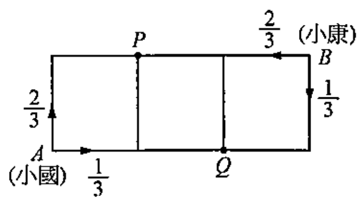
故選(4)。

3. 由題意可知，

小國向上的機率為 $\dfrac{2}{3}$，向右的機率為 $\dfrac{1}{3}$，

小康向左的機率為 $\dfrac{2}{3}$，向下的機率為 $\dfrac{1}{3}$，

如下圖所示，兩人相遇的地方為 P 或 Q，



(Ⅰ) 相遇於 P 點的機率為

$(\dfrac{2}{3}\times 1)\times(\dfrac{2}{3}\times\dfrac{2}{3})+(\dfrac{1}{3}\times\dfrac{2}{3})\times(\dfrac{2}{3}\times\dfrac{2}{3})=\dfrac{32}{81}$。

(Ⅱ) 相遇於 Q 點的機率為

$(\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{3})\times(\dfrac{1}{3}\times 1)+(\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{3})\times(\dfrac{2}{3}\times\dfrac{1}{3})=\dfrac{5}{81}$。

由(Ⅰ)(Ⅱ)可知，兩人相遇的機率為 $\dfrac{32}{81}+\dfrac{5}{81}=\dfrac{37}{81}$，

故選(5)。

二、多選題

4. (1) ○ (2) × (3) ○：

設此橢圓軌道的長軸長為 $2a$，短軸長為 $2b$，

兩焦點的距離為 $2c$，則依題意知，

$a-c=6$，$a+c=20$，

故 $a=13$，$c=7 \Rightarrow b=2\sqrt{30}$。

故(1)(3)正確，(2)錯誤。

(4) ○：設 F_1, F_2 為橢圓軌道的兩個焦點，

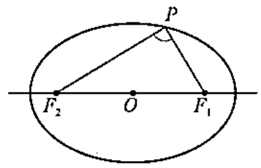
P 為某行星的位置。

則 $\overline{PF_1}+\overline{PF_2}=2a=26$。

令 $\overline{PF_1}=x$，

則 $\overline{PF_2}=26-x$，

又 $\overline{F_1F_2}=2c=14$，



由餘弦定理知，

$14^2=x^2+(26-x)^2-2x(26-x)\cos 60°$，

分解得 $(x-16)(x-10)=0$，故 $x=16$ 或 10

當 $\overline{PF_1}=16$，則 $\overline{PF_2}=10$；當 $\overline{PF_1}=10$，則 $\overline{PF_2}=16$。

(5) ×：$\dfrac{1}{2}\times 10\times 16\times\sin 60°=40\sqrt{3}\ \text{AU}^2$。

故選(1)(3)(4)。

5. (1) ○：因為 $[\sin\dfrac{2\pi}{3}]-\lceil\cos\dfrac{2\pi}{3}\rceil=[\dfrac{\sqrt{3}}{2}]-\lceil-\dfrac{1}{2}\rceil=0-0=0$。

(2) ○：因為 $44<\sqrt{2022}<45 \Rightarrow \lceil\sqrt{2022}\rceil=45$，

$-[-\sqrt{2022}]=-(-45)=45$。

(3) ○：因為 $3<\log 2022<4$

$\Rightarrow [\log 2022]-\lceil\log 2022\rceil=3-4=-1$。

(4) × (5) ×：

因為 $a=0\times 9+1\times 90+2\times 900+3\times 1023=4959$，

$b=0\times 1+1\times 9+2\times 90+3\times 900+4\times 1022=6977$，

所以 $a-b=2018$。

故選(1)(2)(3)。

6. (1) ×：在△ABD 中，$\dfrac{\overline{BD}}{\sin\theta}=\dfrac{\overline{AD}}{\sin B}$，

在△ACD 中，$\dfrac{\overline{CD}}{\sin 2\theta}=\dfrac{\overline{AD}}{\sin C}$，

因為 $\overline{AB}=\overline{AC} \Rightarrow \angle B=\angle C$，所以 $\dfrac{\overline{BD}}{\sin\theta}=\dfrac{\overline{CD}}{\sin 2\theta}$，

又 $\overline{CD}=\overline{BC}-\overline{BD} \Rightarrow \dfrac{\overline{BD}}{\sin\theta}=\dfrac{\overline{BC}-\overline{BD}}{2\sin\theta\cos\theta}$

$\Rightarrow \overline{BD}=\dfrac{1}{2\cos\theta+1}\overline{BC} \Rightarrow t=\dfrac{1}{2\cos\theta+1}$。

(2)(3) ○：因為$0^\circ<3\theta<180^\circ$

$\Rightarrow 0^\circ<\theta<60^\circ \Rightarrow \frac{1}{2}<\cos\theta<1$，

所以$\frac{1}{3}<t<\frac{1}{2}$

$\Rightarrow$ α的最大值為$\frac{1}{3}$，β的最小值為$\frac{1}{2}$。

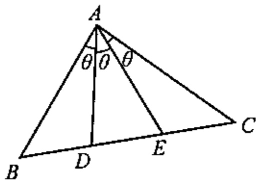
(4) ×：因為$\triangle ABD\cong\triangle ACE\,(ASA)$，

所以$\overline{BD}=\overline{CE}$

$\Rightarrow \overline{DE}=\overline{BC}-2\overline{BD}$

$=(\frac{2\cos\theta-1}{2\cos\theta+1})\overline{BC}$

$\Rightarrow r=\frac{\overline{DE}}{\overline{BD}}=2\cos\theta-1$。



(5) ×：$\overline{BD}:\overline{DE}:\overline{EC}=1:(2\cos\theta-1):1$

故選(2)(3)。

7. (1) × (2) ○：因為$\omega=\sin\frac{\pi}{6}+i\cos\frac{\pi}{6}$

$$=\cos(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6})+i\sin(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6})$$

$$=\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}$$

$\Rightarrow \omega^3=(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3})^3=\cos\pi+i\sin\pi=-1$，

$\omega^6=(\omega^3)^2=1$。

(3) × (4) ○：因為$\omega^3=-1\Rightarrow\omega^3+1=0$

$\Rightarrow(\omega+1)(1-\omega+\omega^2)=0$

$\Rightarrow 1-\omega+\omega^2=0$，

$1+\omega^2+\omega^4=1+\omega^2+\omega\cdot\omega^3=1+\omega^2-\omega=0$。

(5) ○：$\Delta=\begin{vmatrix}1+\omega^2+\omega^4 & \omega^2 & \omega^4\\ 1+\omega^2+\omega^4 & \omega^4 & 1\\ 1+\omega^2+\omega^4 & 1 & \omega^2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1+\omega^2-\omega & \omega^2 & \omega^4\\ 1+\omega^2-\omega & \omega^4 & 1\\ 1+\omega^2-\omega & 1 & \omega^2\end{vmatrix}$

$=\begin{vmatrix}0 & \omega^2 & \omega^4\\ 0 & \omega^4 & 1\\ 0 & 1 & \omega^2\end{vmatrix}=0$，

故選(2)(4)(5)。

8. (1) ○：因為$\overrightarrow{AB}=(-6,3,0)$，$\overrightarrow{AC}=(-4,0,2)$

$\Rightarrow \overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=(6,12,12)$，

所以$\triangle ABC$的面積$=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|=9$。

(2) ×：承(1)，因為$(6,12,12)=6(1,2,2)$

$\Rightarrow x+2y+2z=7$，

所以$a=1$，$b=2$，$c=2\Rightarrow a<b=c$。

(3) ×：因為$d(P,E_{ABC})=\frac{|8\cos\theta+6\sin\theta+18-7|}{\sqrt{1^2+2^2+2^2}}$

$=\frac{|8\cos\theta+6\sin\theta+11|}{3}$，

又因為$-10\le 8\cos\theta+6\sin\theta\le 10$，

$1\le 8\cos\theta+6\sin\theta+11\le 21$，

所以$\frac{1}{3}\le d(P,E_{ABC})\le 7$。

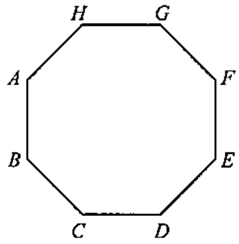
(4) × (5) ○：因為$M=\frac{1}{3}\times 9\times 7=21$，

$m=\frac{1}{3}\times 9\times\frac{1}{3}=1$。

故選(1)(5)。

三、選填題

9. 如右圖，因為這隻青蛙可能跳到E點的次數分別為4次或6次，則



(Ⅰ) 跳4次到達E點，有

$A\to H\to G\to F\to E$與

$A\to B\to C\to D\to E$，

共2種情形。

(Ⅱ) 跳6次後停止跳動，有

$(\ 2^4\ -\ 2\ )\times 2^2=14\times 4=56$種情形，

前4次任意跳　扣除(Ⅰ)的情形　後2次任意跳

所以，由(Ⅰ)(Ⅱ)可知，共有$2+56=58$種不同的跳法。

10. 因為$\overrightarrow{OP}=(5\sin\alpha+2\cos\beta,-\sin\alpha+3\cos\beta)$

$=(5\sin\alpha,-\sin\alpha)+(2\cos\beta,3\cos\beta)$

$=\sin\alpha(5,-1)+\cos\beta(2,3)$，

又因為$0\le\alpha\le\frac{\pi}{6}$，$0\le\beta\le\frac{\pi}{4}$，

所以$0\le\sin\alpha\le\frac{1}{2}$，$\frac{\sqrt{2}}{2}\le\cos\beta\le 1$。

令$A(5,-1)$，$B(2,3)$，則$\overrightarrow{OP}=\sin\alpha\overrightarrow{OA}+\cos\beta\overrightarrow{OB}$

$\Rightarrow P$點所成的圖形為平行四邊形，其面積為

$2\times(\frac{1}{2}-0)\times(1-\frac{\sqrt{2}}{2})\times\triangle OAB$的面積

$=2\times\frac{1}{2}\times\frac{2-\sqrt{2}}{2}\times\frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix}5 & -1\\ 2 & 3\end{vmatrix}\right|$

$=\frac{17}{2}\times\frac{2-\sqrt{2}}{2}=\frac{17(2-\sqrt{2})}{4}$。

11. 因為一顆骰子的點數和為$1+2+3+4+5+6=21$

所以不均勻骰子出現n點的機率為$\frac{n}{21}$，$n=1,2,3,4,5,6$

$\Rightarrow E(\text{一次})=\frac{1}{6}\times\frac{1}{21}\times 1^2+\frac{1}{6}\times\frac{2}{21}\times 2^2+\frac{1}{6}\times\frac{3}{21}\times 3^2+\frac{1}{6}\times\frac{4}{21}\times 4^2+\frac{1}{6}\times\frac{5}{21}\times 5^2+\frac{1}{6}\times\frac{6}{21}\times 6^2$

$=\frac{1}{6}\times\frac{1}{21}\times(1^3+2^3+3^3+4^3+5^3+6^3)$

$=\frac{1}{6}\times\frac{1}{21}\times(1+2+3+4+5+6)^2$

$=\frac{1}{6}\times\frac{1}{21}\times 21^2=\frac{7}{2}$(元)，

所以$E(\text{兩次})=2\times\frac{7}{2}=7$(元)。

第貳部分、混合題或非選擇題

12. 因為$T=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{-1}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & 0\\ 0 & \frac{1}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{-1}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2}\end{bmatrix}$

$=\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & 0\\ 0 & \frac{1}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos 30^\circ & -\sin 30^\circ\\ \sin 30^\circ & \cos 30^\circ\end{bmatrix}$

$\Rightarrow A_i=TA_{i-1}=T(TA_{i-2})=\cdots=T^iA_0$

$=\begin{bmatrix}\frac{1}{2^i} & 0\\ 0 & \frac{1}{2^i}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos(30^\circ\times i) & -\sin(30^\circ\times i)\\ \sin(30^\circ\times i) & \cos(30^\circ\times i)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}40\\ 0\end{bmatrix}$，

$i=1,2,3,\cdots,n$

(1) ×：因為 $30°\times3=90°$，
所以 A_3 在 y 軸上。
(2) ○：因為 $30°\times7=210°$，
所以 A_7 在第三象限內。
(3) ×：因為 $30°\times16=480°=120°+360°$，
所以 A_{16} 在第二象限內。
(4) ○：因為 $30°\times32=960°=240°+360°\times2$，
所以 A_{32} 在第三象限內。
(5) ○：因為 $30°\times91=2730°=210°+360°\times7$，
所以 A_{91} 在第三象限內。
故選(2)(4)(5)。

13. 因為 $A_1=TA_0=\begin{bmatrix}10\sqrt{3}\\10\end{bmatrix}$，

$A_2=TA_1=\begin{bmatrix}5\\5\sqrt{3}\end{bmatrix}$，

$A_3=TA_2=\begin{bmatrix}0\\5\end{bmatrix}$，(1分)

所以 $\triangle OA_2A_3$ 的面積 $=\frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix}5&5\sqrt{3}\\0&5\end{vmatrix}\right|=\frac{25}{2}$。(2分)

14. 因為 $a_1=\triangle OA_0A_1$ 的面積 $=\frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix}40&0\\10\sqrt{3}&10\end{vmatrix}\right|=200$，(1分)

$a_2=\triangle OA_1A_2$ 的面積 $=\frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix}10\sqrt{3}&10\\5&5\sqrt{3}\end{vmatrix}\right|=50$，(1分)

$a_3=\triangle OA_2A_3$ 的面積 $=\frac{25}{2}$，(1分)

可知 $a_1,a_2,a_3,\cdots$ 為公比 $=\frac{1}{4}$ 的等比數列

$\Rightarrow\sum_{k=1}^{\infty}a_k=200+50+\frac{25}{2}+\cdots=\frac{200}{1-\frac{1}{4}}=\frac{800}{3}$。(3分)

15. 因為 $\int_0^5 v(t)\,dt=\int_0^5(-3)\,dt=-3t\big|_0^5=-15$，
所以 P 點會停留在 $(-15,0)$。(2分)

16. 因為 $\int_0^k u(t)\,dt=20\Rightarrow\int_0^k(2t+1)\,dt=20$
$\Rightarrow(t^2+t)\big|_0^k=20\Rightarrow k^2+k-20=0$ (2分)
$\Rightarrow k=4$ 或 -5 (不合)
所以 $k=4$。(2分)

17. 設 s 秒後，$\overline{PQ}$ 有最小值，則
$\int_0^s(-3)\,dt=-3t\big|_0^s=-3s\Rightarrow P(-3s,0)$，(1分)
$\int_0^s(2t+1)\,dt=(t^2+t)\big|_0^s=s^2+s\Rightarrow Q(0,-20+s^2+s)$ (1分)
$\Rightarrow\overline{PQ}=\sqrt{(-3s)^2+(s^2+s-20)^2}$
$=\sqrt{9s^2+s^4+2s^3-39s^2-40s+400}$
$=\sqrt{s^4+2s^3-30s^2-40s+400}$。(1分)
令 $f(s)=s^4+2s^3-30s^2-40s+400$
$\Rightarrow f'(s)=4s^3+6s^2-60s-40$
$\Rightarrow f''(s)=12s^2+12s-60$ (1分)

s	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
$f'(s)$	$-$	$+$	$+$	$+$	$+$	$-$	$-$	$-$	$-$	$+$	$+$

由上表可知 $f'(s)=0$ 在 $(-5,-4)$，$(-1,0)$
與 $(3,4)$ 之間各有一實根，(1分)
但 $s>0$，且 $3<s<4$ 時，$f''(s)>0$，
所以 $3<s<4$ 時，$f(s)$ 有最小值
$\Rightarrow\overline{PQ}$ 的距離會最短，所以 $m=3$。(1分)