全國公私立高級中學111學年度分科測驗第五次聯合模擬考試

數學甲考科解析（卷II）

考試日期：112年2月22~23日

1	2	3	4	5	6	7	8	9-1	9-2	10-1	10-2	11-1	11-2
4	2	4	124	45	1235	135	134	−	2	1	1	5	6
12	13	14	15	16	17								
135													

第壹部分：選擇題

一、單選題

1. 由10等星，$10=-2.5\log\dfrac{F_{10}}{F_0}$，

由2等星，$2=-2.5\log\dfrac{F_2}{F_0}$，

兩式相減 $-8=-2.5\log\dfrac{F_2}{F_{10}}$

$\Rightarrow \log\dfrac{F_2}{F_{10}}=3.2=3+0.2<3+\log 2\approx 3.301$

$\Rightarrow \dfrac{F_2}{F_{10}}=10^{3.2}\approx 1600<2000$，

故選(4)。

2. ＜法一＞

$f(x)$ 除以 x^2-1 的餘式為 $28x-29$，

可得 $f(x)=(x^2-1)Q(x)+28x-29\Rightarrow f(1)=28-29=-1$，

$f(1)=a(1-2)^3+2-1=-1\Rightarrow a=2$，

$f(x)=2(x-2)^3+2x-1=2(x-1-1)^3+2x-1$

$=2[(x-1)^3-3(x-1)^2+3(x-1)-1]+2x-1$

$=(x-1)^2[2(x-1)-6]+6x-8+2x-1$

$=(x-1)^2(2x-8)+8x-9$，餘式 $8x-9$

所以 $m+n=-1$，

故選(2)。

＜法二＞

亦可將 $f(x)=2(x-2)^3+2x-1$ 展開，

用長除法除以 $(x-1)^2$ 得之。

3. 當 F 上場時，可讓 G；H 兩人的戰力變成880和770，

此時 G、H 同時上場的戰力為 $1650<1000+850=I+J$，

所以讓 F、G、H 都在場上，不會最有利。

(I) 球員 B 上場，不配 C：

$B+E+F+I+J=1400+1100+1300+1000+850=5650$。

(II) 球員 BC 同時上場，B 戰力變成1610，

$B+C+F+I+J=1610+1000+1300+1000+850=5760$。

(III) 當 A 戰力最高時，此時不能選 F，

戰力會變成 $1200\times1.25=1500$，

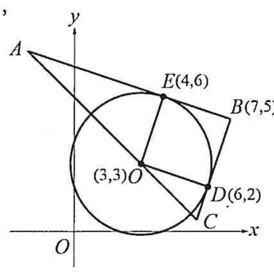
$A+E+C+I+J=1500+1100+1000+1000+850=5450$。

故戰力的最大值為5760，

故選(4)。

二、多選題

4. (1) ○：因為直線 AB 切圓於 E 點，



$m_{\overline{OE}}=\dfrac{6-3}{4-3}=3$

$\Rightarrow m_{\overline{AB}}=-\dfrac{1}{3}$，

所以直線 AB 方程式為

$y-6=-\dfrac{1}{3}(x-4)$

$\Rightarrow x+3y=22$。

(2) ○：同理可求出直線 BC 為 $3x-y=16$

$\Rightarrow\begin{cases}x+3y=22\\3x-y=16\end{cases}\Rightarrow B(7,5)$。

(3) ×：假設 $A(22-3t,t)$，$\overline{AO}^2=(19-3t)^2+(3-t)^2=50$

$\Rightarrow t^2-12t+32=0\Rightarrow t=8,4$

$\Rightarrow A(-2,8)$ 或 $(10,4)$，由圖可知 $(10,4)$ 不合，

故 $A(-2,8)$。

(4) ○：由 $m_{\overline{AB}}=-\dfrac{1}{3}$，$m_{\overline{BC}}=3\Rightarrow$ 可知 $\angle B=90°$，

所以為直角三角形。

(5) ×：半徑 $\overline{OE}=\sqrt{(4-3)^2+(6-3)^2}=\sqrt{10}$，

$\overline{AE}=\sqrt{6^2+(-2)^2}=2\sqrt{10}$，

$\triangle AOE$ 面積 $=\dfrac{1}{2}\times\sqrt{10}\times2\sqrt{10}=10$，

又 $\dfrac{\triangle ABC}{\triangle AOE}=(\dfrac{\overline{AB}}{\overline{AE}})^2=(\dfrac{3\sqrt{10}}{2\sqrt{10}})^2=\dfrac{9}{4}$

$\Rightarrow \triangle ABC=\dfrac{9}{4}\times10=\dfrac{45}{2}$。

故選(1)(2)(4)。

5. (1) ×：$\triangle ADE$ 中，$\angle BAE=\angle AED$，

$\cos\angle BAE=\dfrac{\overline{DE}}{\overline{AE}}=\dfrac{2}{\sqrt{4^2+2^2}}=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$。

(2) ×：$|\overrightarrow{BE}|=\sqrt{4^2+2^2}=2\sqrt{5}$，

$\overrightarrow{AE}=(2\sqrt{5}\cos(\theta+\angle BAE),2\sqrt{5}\sin(\theta+\angle BAE))$

$\neq(4\cos(\theta+60°),4\sin(\theta+60°))$。

(3) ×：$\overrightarrow{AC}=(4\sqrt{2}\cos(\theta+45°),4\sqrt{2}\sin(\theta+45°))$。

(4) ○：$\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DE}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$。

(5) ○：$\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{BD}\cdot(\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD})$

$=\dfrac{1}{2}\cdot4\sqrt{2}\cdot4\cdot\cos135°+4\sqrt{2}\cdot4\cdot\cos45°=8$。

故選(4)(5)。

6. 定坐標 $A(0,0,0)$，$B(4,0,0)$，$P(0,0,4)$，

$C(4,4\sqrt{2},0)$，$E(0,2\sqrt{2},0)$，$F(2,2\sqrt{2},2)$。

(1) ○：$\overline{PC}=\sqrt{4^2+4^2+(4\sqrt{2})^2}=8$。

(2) ○：$\overline{BF}=\sqrt{2^2+(2\sqrt{2})^2+2^2}=4$。

(3) ○：$\overrightarrow{BF}=(-2,2\sqrt{2},2)$，$\overrightarrow{BE}=(-4,2\sqrt{2},0)$，

$\overrightarrow{BF}\times\overrightarrow{BE}=(-4\sqrt{2},-8,4\sqrt{2})\,//\,\overrightarrow{PC}=(4,4\sqrt{2},-4)$，

可知 $\overline{PC}$ 垂直平面 BEF。

(4) ×：$\triangle BEF$ 面積 $=\dfrac{1}{2}|\overrightarrow{BF}\times\overrightarrow{BE}|$

$=\dfrac{1}{2}\sqrt{(-4\sqrt{2})^2+(-8)^2+(4\sqrt{2})^2}$

$=4\sqrt{2}$。

(5) ○：四面體 $PBEF=\dfrac{1}{3}\times4\sqrt{2}\times\overline{PF}=\dfrac{1}{3}\times4\sqrt{2}\times4$

$=\dfrac{16\sqrt{2}}{3}$。

故選(1)(2)(3)(5)。

7. (1) ○：$\det(A)=ad-bc=-1\Rightarrow bc=ad+1>0$。

(2) ×：$A^{-1}=\dfrac{1}{-1}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -d & b \\ c & -a \end{bmatrix}$。

(3) ○：$B=\dfrac{A-A^{-1}}{2}=\dfrac{1}{2}\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} -d & b \\ c & -a \end{bmatrix}\right)$.

$=\dfrac{1}{2}\begin{bmatrix} a+d & 0 \\ 0 & a+d \end{bmatrix}$

$\Rightarrow \det(B)=\dfrac{1}{4}(a+d)^2\neq 0$（因為 $a>0$，$d>0$，

所以 $a+d\neq 0$），

故 B^{-1} 必存在。

(4) ×：$B=\dfrac{1}{2}\begin{bmatrix} a+d & 0 \\ 0 & a+d \end{bmatrix}$

$\Rightarrow B^5=\dfrac{1}{32}\begin{bmatrix} (a+d)^5 & 0 \\ 0 & (a+d)^5 \end{bmatrix}$，

故不存在 A，使得 $B^5=\begin{bmatrix} 2023 & 102 \\ 102 & 2023 \end{bmatrix}$。

(5) ○：$\det(B)=\dfrac{1}{4}(a+d)^2=36$

$\Rightarrow a+d=\pm 12$（取正，因為 $a>0$，$d>0$），

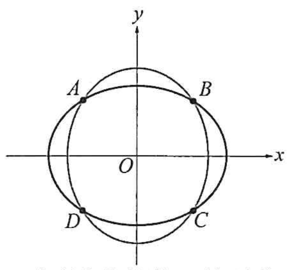
由算幾不等式 $\dfrac{a+d}{2}\geq\sqrt{ad}\Rightarrow(\dfrac{12}{2})^2\geq ad$，

由 $bc=ad+1\leq 36+1=37$，故 bc 最大值 37。

故選(1)(3)(5)。

8. Γ的圖形為中心在原點，焦點在 1、−1，長軸長為 4 的左右型橢圓，$w=iz=z(\cos 90^\circ+i\sin 90^\circ)$，表示將 z 繞著原點，逆時針旋轉 90 度所形成的圖形，可得 Ω 上所有的複數 w 恰形成一個中心在原點，焦點為 $\pm i$，長軸長為 4 的上下型橢圓。

(1) ○：由圖可知，兩圖形的交點有 4 個，故 A 有 4 個元素。



(2) ×：Ω 上所有的複數 w 恰形成一個長軸長為 4 的橢圓。

(3) ○：$|w|$ 表示到原點的距離，當 W 在長軸端點時可取得最大值，故 $|w|$ 最大值為 2。

(4) ○：$|z-3|$ 表示 z 到 3 的距離，其最小值發生在 $z=2$，故最小值為 1。

(5) ×：不妨先考慮坐標平面上，

$\begin{cases} \dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1 \\ \dfrac{x^2}{3}-\dfrac{y^2}{4}=1 \end{cases}\Rightarrow$ 兩式相減，$y=\pm x$ 代入得 $x^2=\dfrac{12}{7}$，

$|a|=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{x^2+x^2}=\sqrt{2x^2}=\sqrt{\dfrac{24}{7}}\neq\sqrt{2}$。

故選(1)(3)(4)。

三、選填題

9. $\overrightarrow{AB}=(4,-4)$，$\overrightarrow{AC}=(a-1,a)$，

由題意可得 $10\leq\dfrac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} 4 & -4 \\ a-1 & a \end{vmatrix}\right|\leq 12\Rightarrow 5\leq|2a-1|\leq 6$

$\Rightarrow 5\leq 2a-1\leq 6$，$-6\leq 2a-1\leq -5$

$\Rightarrow 3\leq a\leq\dfrac{7}{2}$ 或 $\dfrac{-5}{2}\leq a\leq -2$，

因為 a 為負整數，故 $a=-2$

10. 先考慮在第一個定點的狀況前 4 球可視為成功機率為 0.4 的二項分布，故其期望值為 $0.4\times 4=1.6$，

第 5 球的期望值為 $0.3\times 2=0.6$，

所以在第一定點的得分期望值為 $1.6+0.6=2.2$，

所有得分的期望值為 $5\times 2.2=11$。

11. ＜法一＞

將物化生，先用○○○取代，考慮○○○國英數的排列，

{國英不相鄰}−{國英不相鄰且數物相鄰}。

(Ⅰ) {國英不相鄰}

={○○○數排列，再將國英插空隙，最後在○○○填入物化生}

$\Rightarrow\dfrac{4!}{3!}\times P^5_2\times 1=80$。

(Ⅱ) {國英不相鄰且數物相鄰}（物一定在○○左邊）

={$\boxed{\text{物數}}$○○或$\boxed{\text{數物}}$○○，再將國英插空隙，最後填入化生}

$\Rightarrow 2\times P^4_2\times 1=24$。

故方法共有 $80-24=56$。

＜法二＞

(Ⅰ) 數物不相鄰，先排物化∧生∧，

再插入數得 $1\times P^2_1=2$，

再將國英插入 $P^5_2=20$（∧物∧化∧數∧生∧），

得 $2\times 20=40$（種）。

(Ⅱ) 數物相鄰，$\boxed{\text{數物}}$化生

$\Rightarrow 2!=2$。

數物排列

再選國或英先插入$\boxed{\text{數物}}$之間，得 $C^2_1=2$，

再將剩餘的國或英插入空隙，得 $C^4_1=4$，

（∧$\boxed{\text{數國物}}$∧化∧生∧）$\Rightarrow 2\times 2\times 4=16$。

由(Ⅰ)(Ⅱ)得 $40+16=56$。

第貳部分、混合題或非選擇題

12. △OCD 為等腰三角形（因為 $\overline{OC}=\overline{OD}=1$），

$\angle CDO=\angle DCO=60^\circ-\theta$，

$\angle ADO=120^\circ-\angle CDO=120^\circ-(60^\circ-\theta)=60^\circ+\theta$，

$\angle COD=180^\circ-2(60^\circ-\theta)=60^\circ+2\theta$，

$\angle AOD=180^\circ-2(60^\circ+\theta)=60^\circ-2\theta$，

$\overline{BC}=2\overline{CO}\cos\theta=2\cos\theta$，

故選(1)(3)(5)。

13. 等腰梯形的高

$=\overline{CO}\sin\theta+\overline{OD}\sin\angle ADO=\sin\theta+\sin(60^\circ+\theta)$

$=\sin\theta+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta+\dfrac{1}{2}\sin\theta=\dfrac{3}{2}\sin\theta+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta$

$\Rightarrow(a,b)=(\dfrac{\sqrt{3}}{2},\dfrac{3}{2})$。（3 分）

14. 上底 $\overline{AD}=2\overline{OD}\cos\angle ADO=2\cos(60^\circ+\theta)$，

下底 $\overline{BC}=2\cos\theta$。（1 分）

梯形面積

$=\dfrac{1}{2}[2\cos\theta+2\cos(60^\circ+\theta)]\cdot(\dfrac{3}{2}\sin\theta+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta)$

$=(\cos\theta+\dfrac{1}{2}\cos\theta-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta)(\dfrac{3}{2}\sin\theta+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta)$

$=\dfrac{9}{4}\sin\theta\cos\theta+\dfrac{3\sqrt{3}}{4}\cos^2\theta-\dfrac{3\sqrt{3}}{4}\sin^2\theta-\dfrac{3}{4}\sin\theta\cos\theta$

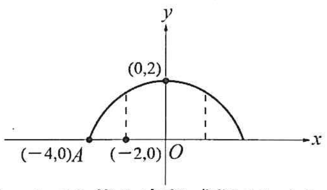
$=\dfrac{3}{4}\sin 2\theta+\dfrac{3\sqrt{3}}{4}\cos 2\theta=\dfrac{3}{2}\sin(2\theta+60^\circ)$，

當 $2\theta+60^\circ=90^\circ\Rightarrow\theta=15^\circ$ 時，（2 分）

有最大面積 $\dfrac{3}{2}$。（2 分）

15. 體積為橢圓柱體，其中 $a=200$，$b=100$。
底面積橢圓形面積 $\pi ab=\pi\cdot 200\cdot 100=20000\pi$ ，(2 分)
故體積為 $20000\pi\cdot 100=2000000\pi$ (立方公里)
$=200\pi$ (萬立方公里)。(2 分)

16. 訂定坐標軸，假設坐標原點 (0 , 0)，長軸在 x 軸上，
高度為 y 軸，假設發射點在 A (-4 , 0)，頂點 (0 , 2)，
則拋物線方程式為 $y=ax^2+2$，



(-4 , 0) 代入方程式得 $16a+2=0$

$\Rightarrow a=-\dfrac{1}{8}$ ，$y=-\dfrac{1}{8}x^2+2$，(2 分)

$x=-2$ 代入 $\Rightarrow y=-\dfrac{1}{8}x^2+2$

$\Rightarrow y=-\dfrac{1}{8}\times 4+2=1.5$ (百公里) >100 公里，(1 分)

故不會發出警報。(1 分)

17. 假設頂點坐標 (0 , t)，則拋物線方程式為 $y=ax^2+\mathrm{t}$，
(-4 , 0) 代入方程式，

$0=a\cdot 16+t\Rightarrow a=-\dfrac{t}{16}$ 可得 $y=-\dfrac{t}{16}x^2+t$ ，

再將 $x=-2$，$y=1$ 代入，$1=-\dfrac{t}{16}\times 4+t\Rightarrow t=\dfrac{4}{3}$ ，(2 分)

故低於 $\dfrac{4}{3}$ (百公里) 時，會觸動警報。(2 分)