

111 學年度全國高級中學分科測驗第六次模擬考數學甲(111-E6)



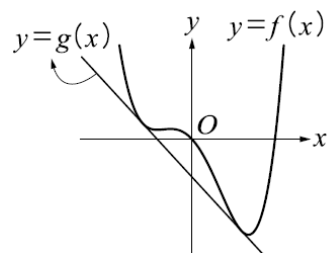
第壹部分：選擇(填)題(占 76 分)

一、單選題(占 18 分)

1. 設 a, b 為實數且 $a > b > 1$ ，若 $\log_a b + \log_b a = \frac{10}{3}$ ， $a^b = b^a$ ，則 $a^2 + b^2$ 的值為下列哪一個選項？ (1) 24 (2) 27 (3) 30 (4) 36 (5) 42
2. 設 $A = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$, $B = [-1 \ 1 \ 2]$ ， $C = AB$ ，若 $C^3 = kC$ ，則實數 k 為下列哪一個選項？
(1) 36 (2) 49 (3) 54 (4) 63 (5) 81
3. 已知自然常數 $e = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{k}\right)^k$ 。對任意的正整數 n ，數列 $\langle a_n \rangle$ 恆滿足 $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < a_n < \left(\frac{n+1}{n+2}\right)^n$ ，則 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ 的值為下列何者？ (1) e (2) e^2 (3) \sqrt{e} (4) $\frac{1}{e}$ (5) 無法判斷

二、多選題(占 40 分)

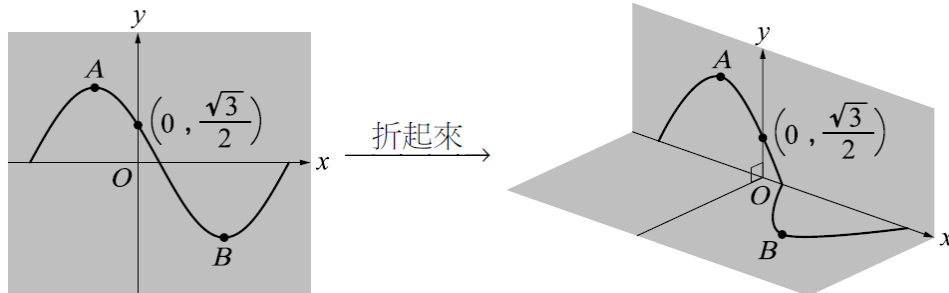
4. 在 $\triangle ABC$ 中，若 $a = \overline{BC}$, $b = \overline{AC}$, $c = \overline{AB}$ ，則以下哪些條件可以確定 $\triangle ABC$ 必為等腰三角形？
(1) $\angle A = 30^\circ$, $a = 4$, $b = 2\sqrt{2} + 2\sqrt{6}$ (2) $\cos(A+B) = 2\cos A \cos B$ (3) $\sin(A+B) = \sin B$
(4) $\cos 2A = \cos 2B$ (5) $a \cos A = b \cos B$
5. 設 z 為複數且 z 的實部與 z 的虛部的和為零， $i = \sqrt{-1}$ ，請選出正確的選項。
(1) z 在複數平面上所形成的圖形為一直線 (2) $|z-1| = |z+i|$
(3) $|z-4|$ 的最小值為 2 (4) 恰有一個複數 z 滿足 $|z-4| = 3$
(5) 恰有一個複數 z 滿足 $|z-i| = |z-2|$
6. 設 a 為非零實數，試選出最小值為 6 的選項。 (1) $a + \frac{9}{a}$ (2) $a^2 + \frac{9}{a^2}$ (3) $a^2 + \frac{9}{a^2+1}$
(4) $a^2 + a + 2 + \frac{9}{a^2+a+2}$ (5) $a^2 + \frac{4}{a^2} + \sqrt{a^4 + \frac{4}{a^4}}$
7. 設 O 為坐標平面上的原點 $(0,0)$ ， $A(3,1)$ ， $B(1,3)$ 及 P, Q 為平面上異於 O 的相異四點，且 $\overrightarrow{OP} = (2 \cos \theta) \overrightarrow{OA} - (\sin \theta) \overrightarrow{OB}$ ， $\overrightarrow{OQ} = (\sin \theta) \overrightarrow{OA} - (2 \cos \theta) \overrightarrow{OB}$ ，其中 $0 < \theta < 2\pi$ 。請選出正確的選項。
(1) 存在 θ 使得 \overline{OP} 平分 $\angle AOB$ (2) 恰存在兩個 θ 使得向量 \overrightarrow{OP} 與 \overrightarrow{OQ} 垂直
(3) 存在 θ 使得 A, B, P 三點共線 (4) 存在 θ 使得 A, B, Q 三點共線
(5) $\triangle OPQ$ 面積的最大值為 12
8. 設實係數多項式函數 $f(x) = x^4 + ax^2 + bx$, $g(x) = ax + b$, $a \neq 0$ ，若 $y = f(x)$ 的圖形與 $y = g(x)$ 的圖形相切且兩圖形只有兩個交點，如右略圖，請選出正確的選項。
(1) 方程式 $f'(x) = 0$ 必有實根 (2) $a = 1$ (3) $b = -4$
(4) 滿足 $f''(\alpha) = g''(\alpha)$ 的實數 α 恰有兩個
(5) $f(x)$ 的所有極值之和為 -9



三、選填題 (占 18 分)

9. 某間自助式吃到飽火鍋店，點完湯底後，可自行至冷藏櫃夾取食材，若該間店的冷藏櫃有四層，由上而下依序為「肉品區」、「海鮮區」、「火鍋料區」、「蔬菜區」。每一區都有三種不同食材，某位顧客想從這些食材中挑選若干種放進火鍋中，若希望從這四層冷藏櫃挑選的食材中，取自任意兩層冷藏櫃的食材種類之和至少 1 種，最多 3 種，則該顧客有_____種選擇食材的方法。

10. 如下圖，小萱在一張標有 x 軸及 y 軸的紙上畫了函數 $f(x) = a \sin\left(\frac{\pi}{3}x + c\right)$ 的部分圖形，其中 $a > 0$ ， $\frac{\pi}{2} < c < \pi$ ， A, B 在 y 軸異側， A 為最高點， B 為最低點，且圖形過點 $(0, \frac{\sqrt{3}}{2})$ 。若將此張紙沿 x 軸折起使得兩個半平面垂直，此時 $\overline{AB} = \sqrt{15}$ ，則數對 $(a, c) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。(化為最簡分數、最簡根式)



11. 已知空間中 $\triangle ABC$ 的三頂點為 $A(1, -1, 4), B(3, 5, 2), C(4, 2, -2)$ ，有一平面 $E: x + ay + bz + c = 0$ 分別交 \overline{AB} 、 \overline{AC} 於 P, Q 兩點，且 \overline{AC} 與平面 E 垂直，若 $\triangle ABC$ 的面積為 $\triangle APQ$ 的 6 倍，試求實數序組 $(a, b, c) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

第貳部分：混合題或非選擇題(占 24 分)

12-14 題為題組

已知橢圓 $\Gamma: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左右焦點分別為 F_1 、 F_2 ，直線 L 過 F_1 並與 Γ 交於 A 、 B 兩點，若 Γ 的長軸長為短軸長的 2 倍，且 $\triangle ABF_2$ 的周長為 16，試回答下列問題：

12. 橢圓 Γ 的長軸長為下列哪一個選項？(單選題，3 分)

- (1) 6 (2) 8 (3) 10 (4) 12 (5) 14

13. 試求橢圓 Γ 的方程式。(非選擇題，3 分)

14. 若 $\triangle ABF_2$ 的內切圓之面積為 π ， A 、 B 兩點的坐標分別為 $A(x_1, y_1)$ 、 $B(x_2, y_2)$ ，試求 $|y_1 - y_2|$ 的值。(非選擇題，6 分)

15-17 題為題組

在某款遊戲中，若將遊戲畫面視為一個坐標平面，玩家一開始須從點 $A(-3, 3)$ 發射一道雷射光線，該光線在地面上(即 x 軸上)經反射一次後再照到圓 $C: x^2 + y^2 - 4x - 4y + 7 = 0$ 上，在此遊戲中，圓 C 有三種顯示模式。試回答下列問題：

15. 穿透模式(光線可穿透圓 C)：

若光線反射後穿過圓 C 的圓心，則反射光線的斜率為何？(非選擇題，4 分)

16. 黑洞模式(圓 C 會吸收觸碰到的所有光線)：

若光線反射照到圓 C 後被吸收，且不再繼續前進，則此道光線從一開始到反射照到圓 C 所經過的最短路徑為_____。(化為最簡根式)(選填題，4 分)

17. 石化模式(圓 C 會阻擋觸碰到的所有光線)：

若光線反射照到圓 C 後被阻擋住透不過去，則被阻擋住的所有反射光線在 x 軸上所成的最大範圍為 $a \leq x \leq b$ ，試求數對 (a, b) 。(非選擇題，4 分)

**RA6108 111 學年度全國高級中學分科測驗第六次模擬考
數學甲(111-E6)**

參考答案

選擇題：1.(3) 2.(2) 3.(4) 4.(3)(4) 5.(1)(2)(5) 6.(2)(4) 7.(1)(3)(4) 8.(1)(3)(4)

選填題：9. 837 10. $(\sqrt{3}, \frac{5}{6}\pi)$ 11. (1, -2, 2)

混合題或非選擇題：12. (2) 13. $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$ 14. $\frac{4\sqrt{3}}{3}$

15. 1 16. $5\sqrt{2}-1$ 17. $(-\frac{3}{4}, 1)$