# 數學甲考科詳解

| 1. | 2. | 3. | 4. | 5. | 6. | 7. |
|---|---|---|---|---|---|---|
| (3) | (2) | (4) | (3)(4) | (1)(2)(5) | (2)(4) | (1)(3)(4) |
| 8. | | | | | | |
| (1)(3)(4) | | | | | | |

**第壹部分、選擇(填)題**

**一、單選題**

1. (3)

出處：第三冊〈指數與對數函數〉

目標：指數與對數的運算

解析：由換底公式 $\log_a b=\dfrac{\log b}{\log a}$，$\log_b a=\dfrac{\log a}{\log b}$

$\therefore \dfrac{10}{3}=\dfrac{\log b}{\log a}+\dfrac{\log a}{\log b}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(*)$

由 $a^b=b^a$

$\Rightarrow \log a^b=\log b^a$

$\Rightarrow b\log a=a\log b\Rightarrow \dfrac{\log b}{\log a}=\dfrac{b}{a}$

代入$(*)$得

$\dfrac{10}{3}=\dfrac{b}{a}+\dfrac{a}{b}\Rightarrow 3\left(\dfrac{b}{a}\right)^2-10\cdot\left(\dfrac{b}{a}\right)+3=0$

$\Rightarrow \dfrac{b}{a}=3$ 或 $\dfrac{1}{3}$ (3 不合 $\because a>b>1$)

$\therefore \dfrac{b}{a}=\dfrac{1}{3}$

即 $\dfrac{\log b}{\log a}=\log_a b=\dfrac{1}{3}\Rightarrow b=a^{\frac{1}{3}}$

代回 $\dfrac{b}{a}=\dfrac{1}{3}$

$\Rightarrow a^{\frac{2}{3}}=3\Rightarrow a=3^{\frac{3}{2}}$，$b=3^{\frac{1}{2}}$

$\Rightarrow a^2+b^2=(3^{\frac{3}{2}})^2+(3^{\frac{1}{2}})^2=3^3+3=30$

故選(3)。

2. (2)

出處：第四冊〈矩陣〉

目標：矩陣的乘法及結合律

解析：〔解法一〕直接計算

$$C=AB=\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}[-1\ \ 1\ \ 2]=\begin{bmatrix}-1&1&2\\-2&2&4\\-3&3&6\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow C^2=\begin{bmatrix}-1&1&2\\-2&2&4\\-3&3&6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1&1&2\\-2&2&4\\-3&3&6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-7&7&14\\-14&14&28\\-21&21&42\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow C^3=C^2C=\begin{bmatrix}-7&7&14\\-14&14&28\\-21&21&42\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1&1&2\\-2&2&4\\-3&3&6\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}-49&49&98\\-98&98&196\\-147&147&294\end{bmatrix}$$

$=49C$

$\therefore k=49$，故選(2)。

〔解法二〕利用矩陣乘法結合律

$$\because BA=[-1\ \ 1\ \ 2]\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}=[7]$$

又 $C=AB$

$\Rightarrow C^3=(AB)(AB)(AB)=A(BA)(BA)B$

$$=\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}[7][7][-1\ \ 1\ \ 2]$$

$$=\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}[49][-1\ \ 1\ \ 2]$$

$=49AB=49C$

$\therefore k=49$

故選(2)。

3. (4)

出處：選修數學甲〈極限與函數〉

目標：夾擠定理、數列極限的運算性質

解析：已知 $e=\lim\limits_{k\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{k}\right)^k$

則 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^n=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{n}}\right)^n=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n}=\dfrac{1}{e}$

另一方面，令 $m=n+1$

則 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+1}{n+2}\right)^{n+1}=\lim\limits_{m\to\infty}\left(\dfrac{m}{1+m}\right)^m=\dfrac{1}{e}$

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+1}{n+2}\right)^n=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\left(\dfrac{n+1}{n+2}\right)^{n+1}}{\dfrac{n+1}{n+2}}=\dfrac{\dfrac{1}{e}}{1}=\dfrac{1}{e}$

$\left(\because\text{分子、分母極限存在且}\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+1}{n+2}\neq 0\right)$

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^n=\dfrac{1}{e}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+1}{n+2}\right)^n$

由夾擠定理知 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\dfrac{1}{e}$

故選(4)。

**二、多選題**

4. (3)(4)

出處：第二冊〈三角比〉、第三冊〈三角函數〉

目標：正弦定理、和角公式

解析：(1)╳：由正弦定理

$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}\Rightarrow \dfrac{4}{\sin 30^\circ}=\dfrac{2\sqrt{2}+2\sqrt{6}}{\sin B}$

$\Rightarrow \sin B=\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

$\therefore \angle B=75^\circ$ 或 $105^\circ$

若 $\angle B=75^\circ\Rightarrow\angle C=75^\circ$，

此時$\triangle ABC$ 為等腰三角形

若 $\angle B=105^\circ\Rightarrow\angle C=45^\circ$，

此時$\triangle ABC$ 不為等腰三角形

(2)╳：$\cos(A+B)=2\cos A\cos B$

$\Rightarrow \cos A\cos B-\sin A\sin B=2\cos A\cos B$

$\Rightarrow \cos(A-B)=0\Rightarrow A-B=\pm 90^\circ$

取$\angle A=105^\circ$，$\angle B=15^\circ$，$\angle C=60^\circ$
或$\angle A=15^\circ$，$\angle B=105^\circ$，$\angle C=60^\circ$
滿足 $\cos(A+B)=2\cos A\cos B$，但$\triangle ABC$ 不為等腰三角形

(3) ○：$\because \angle A+\angle B+\angle C=180^\circ$
$\Rightarrow \angle A+\angle B=180^\circ-\angle C \Rightarrow \sin(A+B)=\sin C$
$\therefore \sin C=\sin B \Rightarrow \angle C=\angle B$ 或$\angle C+\angle B=180^\circ$
但在$\triangle ABC$ 中，$\angle C+\angle B=180^\circ$ 不可能成立
$\therefore \angle C=\angle B$
故$\triangle ABC$ 必為等腰三角形

(4) ○：$\cos 2A=\cos 2B \Rightarrow 2\cos^2 A-1=2\cos^2 B-1$
$\Rightarrow \cos^2 A=\cos^2 B$
$\therefore$ ① $\cos A$，$\cos B$ 皆正 $\Rightarrow \cos A=\cos B \Rightarrow \angle A=\angle B$
② $\cos A$，$\cos B$ 一正一負 $\Rightarrow \cos A=-\cos B$
$\Rightarrow \angle A+\angle B=180^\circ$(不合)
因此，$\triangle ABC$ 必為等腰三角形

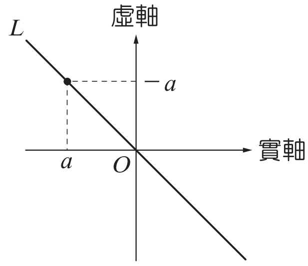
(5) ╳：由正弦定理得 $\dfrac{a}{b}=\dfrac{\sin A}{\sin B}=\dfrac{\cos B}{\cos A}$
$\Rightarrow \sin A\cos A=\sin B\cos B$
$\Rightarrow \sin 2A=\sin 2B$
$\Rightarrow 2\angle A=2\angle B$ 或 $2\angle A+2\angle B=180^\circ$
$\Rightarrow \angle A=\angle B$ 或$\angle A+\angle B=90^\circ$
$\therefore \triangle ABC$ 未必是等腰三角形

故選(3)(4)。

5. (1)(2)(5)

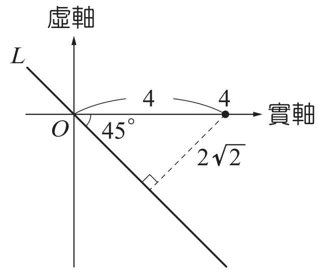
出處：選修數學甲〈複數與多項式方程式〉
目標：複數的幾何意義
解析：設 $z=a+bi$，$a$，$b\in\mathbb{R}$
由題意知 $a+b=0 \Rightarrow b=-a$

(1) ○：$z=a-ai$，$a\in\mathbb{R}$
$\therefore z$ 在複數平面的坐標為 $(a,-a)$，
其圖形為一直線 $L$

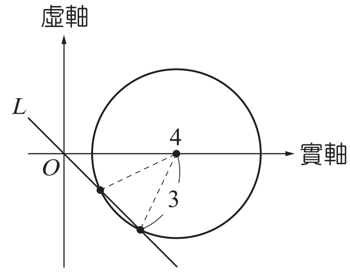



(2) ○：$z=a-ai$
$\Rightarrow |z-1|=|(a-1)-ai|$
$=\sqrt{(a-1)^2+(-a)^2}$
$=\sqrt{2a^2-2a+1}$
$|z+i|=|a+(1-a)i|$
$=\sqrt{a^2+(1-a)^2}$
$=\sqrt{2a^2-2a+1}$
$\therefore |z-1|=|z+i|$
〔另解〕
$|z-1|$ 表 $z$ 到 1 的距離，$|z+i|$ 表 $z$ 到 $-i$ 的距離
1 與 $-i$ 兩點的中垂線即為直線 $L$
因此 $|z-1|=|z+i|$

(3) ╳：$|z-4|$ 表 $z$ 到 4 的距離
由下圖知 $|z-4|$ 的最小值為 $2\sqrt{2}$

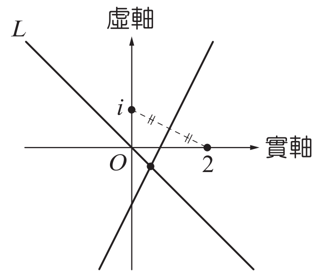



(4) ╳：$|z-4|=3$ 表 $z$ 到 4 的距離為 3
由(3)知 $z$ 到 4 的最短距離為 $2\sqrt{2}$ 且 $3>2\sqrt{2}$
以 4 為圓心，半徑為 3 作一圓，會與 $L$ 交於 2 點
如下圖




因此，恰有兩個複數 $z$ 滿足 $|z-4|=3$

(5) ○：$|z-i|=|z-2|$ 表 $z$ 到 $i$ 的距離等於 $z$ 到 2 的距離
$\therefore z$ 在 $i$ 與 2 兩點的中垂線上
由下圖知 $i$ 與 2 兩點的中垂線與 $L$ 恰交於 1 點




$\therefore$ 恰有一個複數 $z$ 滿足 $|z-i|=|z-2|$

故選(1)(2)(5)。

6. (2)(4)

出處：第一冊〈數與式〉
目標：算幾不等式
解析：(1) ╳：若 $a<0$，沒有最小值

(2) ○：$a^2>0$
由算幾不等式
$a^2+\dfrac{9}{a^2}\geq 2\sqrt{a^2\cdot\dfrac{9}{a^2}}=6$
等號成立時 $a^2=\dfrac{9}{a^2}$
$\Rightarrow a^4=9 \Rightarrow a=\pm\sqrt{3}$

(3) ╳：$a^2+\dfrac{9}{a^2+1}=(a^2+1)+\dfrac{9}{a^2+1}-1$
$\geq 2\sqrt{(a^2+1)\cdot\dfrac{9}{a^2+1}}-1=6-1=5$
$\therefore a^2+\dfrac{9}{a^2+1}$ 的最小值為 5

(4) ○：$\because a^2+a+2=\left(a+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{7}{4}$ 恆大於 0

由算幾不等式

$(a^2+a+2)+\dfrac{9}{a^2+a+2}$

$\geq 2\sqrt{(a^2+a+2)\cdot\dfrac{9}{a^2+a+2}}=6$

等號成立時 $(a^2+a+2)^2=9$

$\Rightarrow a^2+a+2=3 \Rightarrow a^2+a-1=0$

$\Rightarrow a=\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$

$\therefore a^2+a+2+\dfrac{9}{a^2+a+2}$ 的最小值為 6

(5) ╳：$\because a^2>0$，$a^4>0$，由算幾不等式

$a^2+\dfrac{4}{a^2}\geq 2\sqrt{a^2\cdot\dfrac{4}{a^2}}=4$

$a^4+\dfrac{4}{a^4}\geq 2\sqrt{a^4\cdot\dfrac{4}{a^4}}=4$

$\Rightarrow\sqrt{a^4+\dfrac{4}{a^4}}\geq 2$

$\Rightarrow a^2+\dfrac{4}{a^2}+\sqrt{a^4+\dfrac{4}{a^4}}\geq 6$

但等號不會成立

$\because a^2+\dfrac{4}{a^2}\geq 4$

等號成立時 $a^2=\dfrac{4}{a^2}\Rightarrow a=\pm\sqrt{2}$

而 $a^4+\dfrac{4}{a^4}\geq 4$ 等號成立時，$a^4=\dfrac{4}{a^4}\Rightarrow a=\pm 2^{\frac{1}{4}}$

沒有共同的 $a$ 值使得上面兩組不等式的等號成立

因此，$a^2+\dfrac{4}{a^2}+\sqrt{a^4+\dfrac{4}{a^4}}$ 的最小值不是 6

故選(2)(4)。

7. (1)(3)(4)

**出處**：第二冊〈三角比〉、第三冊〈平面向量〉

**目標**：三角比的運算、向量的線性組合

**解析**：(1) ○：若 $\overline{OP}$ 平分 $\angle AOB$

$\Rightarrow|(2\cos\theta)\overrightarrow{OA}|=|(-\sin\theta)\overrightarrow{OB}|$

$\because|\overrightarrow{OA}|=|\overrightarrow{OB}|$

$\therefore 2|\cos\theta|=|\sin\theta|\Rightarrow|\tan\theta|=2$

又 $0<\theta<2\pi\Rightarrow\theta$ 存在

故存在 $\theta$ 使得 $\overline{OP}$ 平分 $\angle AOB$

(2) ╳：$\overrightarrow{OP}=(2\cos\theta)\overrightarrow{OA}-(\sin\theta)\overrightarrow{OB}$

$=(6\cos\theta-\sin\theta, 2\cos\theta-3\sin\theta)$

$\overrightarrow{OQ}=(\sin\theta)\overrightarrow{OA}+(2\cos\theta)\overrightarrow{OB}$

$=(3\sin\theta+2\cos\theta, 6\cos\theta+\sin\theta)$

則 $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}=24\cos^2\theta-6\sin^2\theta$

若 $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}=0\Rightarrow 24\cos^2\theta-6\sin^2\theta=0$

$\Rightarrow\tan^2\theta=4$

$\Rightarrow\tan\theta=\pm 2$

在 $0<\theta<2\pi$ 中，使得 $\tan\theta=2$ 的 $\theta$ 有 2 個

使得 $\tan\theta=-2$ 的 $\theta$ 有 2 個

因此，使得 $\overrightarrow{OP}\perp\overrightarrow{OQ}$ 的 $\theta$ 恰有 4 個

(3) ○：若 $A$，$B$，$P$ 三點共線

$\overrightarrow{OP}=(2\cos\theta)\overrightarrow{OA}-(\sin\theta)\overrightarrow{OB}$

$\Rightarrow 2\cos\theta-\sin\theta=1$

解聯立 $\begin{cases}2\cos\theta-\sin\theta=1\\ \cos^2\theta+\sin^2\theta=1\end{cases}$

得 $\cos\theta=0$，$\sin\theta=-1$

(不合 $\because$ 此時 $P=B$，但 $P$，$B$ 相異)

或 $\cos\theta=\dfrac{4}{5}$，$\sin\theta=\dfrac{3}{5}$

$\therefore\overrightarrow{OP}=\dfrac{8}{5}\overrightarrow{OA}-\dfrac{3}{5}\overrightarrow{OB}$

因此，當 $\cos\theta=\dfrac{4}{5}$，$\sin\theta=\dfrac{3}{5}$ 時，$A$，$B$，$P$ 三點共線

(4) ○：若 $A$，$B$，$Q$ 三點共線

$\overrightarrow{OQ}=(\sin\theta)\overrightarrow{OA}+(2\cos\theta)\overrightarrow{OB}$

$\Rightarrow\sin\theta+2\cos\theta=1$

解聯立 $\begin{cases}\sin\theta+2\cos\theta=1\\ \cos^2\theta+\sin^2\theta=1\end{cases}$

得 $\cos\theta=0$，$\sin\theta=1$

(不合 $\because$ 此時 $Q=A$，但 $Q$，$A$ 相異)

或 $\cos\theta=\dfrac{4}{5}$，$\sin\theta=-\dfrac{3}{5}$

$\therefore\overrightarrow{OQ}=-\dfrac{3}{5}\overrightarrow{OA}+\dfrac{8}{5}\overrightarrow{OB}$

因此，當 $\cos\theta=\dfrac{4}{5}$，$\sin\theta=-\dfrac{3}{5}$ 時，$A$，$B$，$Q$ 三點共線

(5) ╳：$\overrightarrow{OP}=(6\cos\theta-\sin\theta, 2\cos\theta-3\sin\theta)$，

$\overrightarrow{OQ}=(3\sin\theta+2\cos\theta, 6\cos\theta+\sin\theta)$

$\therefore\triangle OPQ$ 面積為

$\dfrac{1}{2}\left|\begin{vmatrix}6\cos\theta-\sin\theta & 2\cos\theta-3\sin\theta\\ 3\sin\theta+2\cos\theta & 6\cos\theta+\sin\theta\end{vmatrix}\right|$

$=\dfrac{1}{2}|(6\cos\theta-\sin\theta)(6\cos\theta+\sin\theta)$

$-(2\cos\theta-3\sin\theta)(3\sin\theta+2\cos\theta)|$

$=\dfrac{1}{2}|36\cos^2\theta-\sin^2\theta-(4\cos^2\theta-9\sin^2\theta)|$

$=\dfrac{1}{2}|32\cos^2\theta+8\sin^2\theta|$

$=4|1+3\cos^2\theta|$

$\leq 4\times|1+3|=16$

當 $\theta=\pi$ 時等號成立，

故 $\triangle OPQ$ 面積的最大值為 16

故選(1)(3)(4)。

8. (1)(3)(4)

**出處**：選修數學甲〈微分〉、選修數學甲〈複數與多項式方程式〉

**目標**：微分與切線、函數的極值、多項式方程式

**解析**：(1) ○：$f'(x)=4x^3+2ax+b$

$f'(x)=0$ 為三次實係數多項式方程式，故必有實根

(2) ╳：$\because y=f(x)$ 的圖形與 $y=g(x)$ 的圖形相切且只有 2 個交點

$\therefore x^4+ax^2+bx=ax+b$ 有 4 實根且有兩組重根

令實根為 $h$，$k$

$\Rightarrow x^4+ax^2+bx-ax-b=(x-h)^2(x-k)^2$

$=(x^2-2hx+h^2)(x^2-2kx+k^2)$

比較 $x^3$ 項係數得 $k=-h$，則

$x^4+ax^2+(b-a)x-b=(x-h)^2(x+h)^2$

$=(x^2-h^2)^2=x^4-2h^2x^2+h^4$

$$\Rightarrow\begin{cases}a=-2h^2\\ b-a=0\\ -b=h^4\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=b=-4\\ h=\pm\sqrt{2}\end{cases}$$

⑶ ○

⑷ ○：由⑵知

$f(x)=x^4-4x^2-4x$，$g(x)=-4x-4$

$\therefore f''(x)=12x^2-8$，$g''(x)=0$

$f''(x)=g''(x)\Rightarrow 12x^2-8=0$

$\Rightarrow x=\pm\sqrt{\dfrac{2}{3}}$

$\therefore$滿足 $f''(\alpha)=g''(\alpha)$ 的實數 $\alpha$ 恰有 2 個

⑸ ╳：$f'(x)=4x^3-8x-4$

令 $f'(x)=0\Rightarrow x^3-2x-1=0$

$\Rightarrow(x+1)(x^2-x-1)=0$

$\Rightarrow x=-1$ 或 $\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}$

$\therefore f'(x)=4(x+1)\left(x-\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\left(x-\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$

| $x$ | $x<-1$ | $-1$ | $-1<x<\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ | $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ |
|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $-$ | 0 | $+$ | 0 |

| $x$ | $\frac{1-\sqrt{5}}{2}<x<\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ | $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ | $x>\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $-$ | 0 | $+$ |

$\therefore f(-1)$、$f\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$ 為極小值，

$f\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)$ 為極大值

$f(-1)=1-4+4=1$

$\because f(x)=(x^2-x-1)(x^2+x-2)-5x-2$

$\therefore f\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)=-5\cdot\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)-2$，

$f\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)=-5\cdot\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)-2$

所求為 $1+(-5)-4=-8$

故選⑴⑶⑷。

## 三、選填題

9. 837

**出處**：第二冊〈排列組合與機率〉

**目標**：加法原理、組合

**解析**：

| 肉品區 | 海鮮區 | 火鍋料區 | 蔬菜區 |
|---|---|---|---|
| $a_1$ | $b_1$ | $c_1$ | $d_1$ |
| $a_2$ | $b_2$ | $c_2$ | $d_2$ |
| $a_3$ | $b_3$ | $c_3$ | $d_3$ |

由題意知最多可以有 1 層不挑食材

最多可以有 1 層挑 2 種食材

$\therefore$這四層挑選食材的情形有

0 1 1 1：$\dfrac{4!}{3!}\cdot(C^3_1)^3=108$

0 2 1 1：$\dfrac{4!}{2!}\cdot C^3_2\cdot(C^3_1)^2=324$

1 1 1 2：$\dfrac{4!}{3!}\cdot(C^3_1)^3\cdot C^3_2=324$

1 1 1 1：$(C^3_1)^4=81$

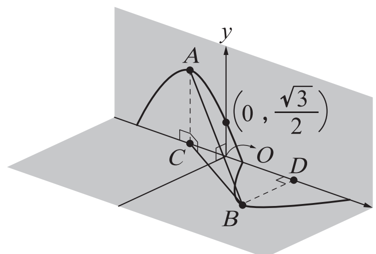
因此，共有 $108+324+324+81=837$ 種。

10. $\left(\sqrt{3},\dfrac{5}{6}\pi\right)$

**出處**：第三冊〈三角函數〉、第四冊〈空間概念〉

**目標**：正弦函數的圖形、空間概念

**解析**：由 $A$、$B$ 分別對 $x$ 軸作垂足得 $C$、$D$ 兩點，如下圖




設 $\overline{AC}=\overline{BD}=a>0$

$f(x)=a\sin\left(\dfrac{\pi}{3}x+c\right)\Rightarrow y=f(x)$ 的週期為 $\dfrac{2\pi}{\frac{\pi}{3}}=6$

$\therefore\overline{CD}=\dfrac{6}{2}=3\Rightarrow\overline{BC}=\sqrt{a^2+9}$

$\because$兩個半平面垂直

$\therefore\overline{AC}\perp\overline{BC}\Rightarrow\overline{AB}=\sqrt{\overline{AC}^2+\overline{BC}^2}=\sqrt{a^2+a^2+9}=\sqrt{15}$

$\Rightarrow a^2=3\Rightarrow a=\sqrt{3}$

將 $\left(0,\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ 代入 $f(x)=\sqrt{3}\sin\left(\dfrac{\pi}{3}x+c\right)$ 得

$\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}\cdot\sin c\Rightarrow\sin c=\dfrac{1}{2}$

又 $\dfrac{\pi}{2}<c<\pi$ $\therefore c=\dfrac{5}{6}\pi$

因此，數對 $(a,c)=\left(\sqrt{3},\dfrac{5}{6}\pi\right)$。

11. $(1,-2,2)$

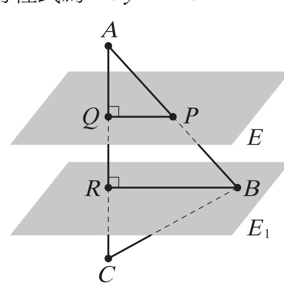
**出處**：第四冊〈空間中的平面與直線〉

**目標**：平面方程式、點到平面的距離

**解析**：因為 $\overline{AC}$ 垂直平面 $E$，所以 $\overrightarrow{AC}$ 可作為 $E$ 的一個法向量

$\overrightarrow{AC}=(3,3,-6)$，取 $\overrightarrow{n}=(1,1,-2)$ 為 $E$ 的法向量

$\therefore E$ 的方程式為 $x+y-2z+c=0\Rightarrow a=1$，$b=-2$



設 $E_1$ 為過點 $B$ 且與 $E$ 平行之平面

令 $E_1$：$x+y-2z+k=0$

將 $B(3,5,2)$ 代入得 $k=-4$

$\therefore E_1$：$x+y-2z-4=0$

設 $\overline{AC}$ 與 $E_1$ 交於 $R$ 點

$\because$($A$ 到 $E_1$ 的距離)：($C$ 到 $E_1$ 的距離)

$=\dfrac{|1-1-8-4|}{\sqrt{6}}:\dfrac{|4+2+4-4|}{\sqrt{6}}$

$=2\sqrt{6}:\sqrt{6}=2:1$

$\therefore \triangle ABR$ 面積$=\dfrac{2}{3}\triangle ABC$ 面積

設 $\overline{AQ}=h$

$\because \triangle APQ$ 與 $\triangle ABR$ 相似

$\therefore \dfrac{\triangle APQ\text{ 面積}}{\triangle ABR\text{ 面積}}=\dfrac{h^2}{(2\sqrt{6})^2}$

$\Rightarrow \triangle APQ$ 面積$=\dfrac{h^2}{24}\times(\triangle ABR$ 面積$)$

$=\dfrac{h^2}{24}\times\left(\dfrac{2}{3}\triangle ABC\text{ 面積}\right)$

$=\dfrac{h^2}{36}\triangle ABC$ 面積

$\because \triangle ABC$ 的面積為 $\triangle APQ$ 面積的 6 倍

$\therefore \dfrac{h^2}{36}=\dfrac{1}{6}\Rightarrow h=\sqrt{6}$

$\sqrt{6}=\overline{AQ}=A$ 到平面 $E$ 的距離$=\dfrac{|1-1-8+c|}{\sqrt{6}}$

$\Rightarrow c=2$ 或 14

若 $c=14$，則 ($A$ 到 $E$ 的距離)+($C$ 到 $E$ 的距離)$>\overline{AC}$

故不合

因此，平面 $E$：$x+y-2z+2=0$

故序組 $(a,b,c)=(1,-2,2)$

〔另解〕

$\overrightarrow{AB}=(2,6,-2)$，$\overrightarrow{AC}=(3,3,-6)$

$\cos A=\dfrac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}|\,|\overrightarrow{AC}|}$

$=\dfrac{6+18+12}{\sqrt{44}\times\sqrt{54}}=\dfrac{6}{\sqrt{66}}$

$\because \dfrac{\triangle APQ\text{ 面積}}{\triangle ABC\text{ 面積}}=\dfrac{\frac{1}{2}\times\overline{AP}\times\overline{AQ}\times\sin A}{\frac{1}{2}\times\overline{AB}\times\overline{AC}\times\sin A}$

$=\dfrac{1}{6}$

$\Rightarrow \dfrac{\overline{AP}\times\overline{AQ}}{\overline{AB}\times\overline{AC}}=\dfrac{\overline{AP}\times\overline{AP}\cos A}{\sqrt{44}\times\sqrt{54}}$

$=\dfrac{\overline{AP}^2}{66}=\dfrac{1}{6}$

$\Rightarrow \overline{AP}=\sqrt{11}$

又 $\overline{AB}=\sqrt{44}=2\sqrt{11}$　$\therefore P$ 為 $\overline{AB}$ 中點

得 $P(2,2,3)$ 代入 $E$：$2+2-6+c=0$

$\Rightarrow c=2$

故序組 $(a,b,c)=(1,-2,2)$。

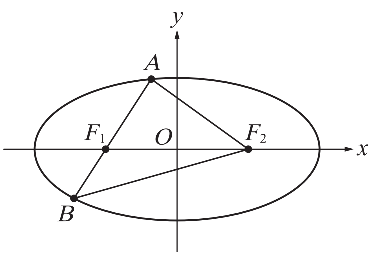
**第貳部分、混合題或非選擇題**

12. (2)

出處：選修數學甲〈二次曲線〉

目標：橢圓的定義

解析：




$\because A$、$B$ 皆在橢圓上

由橢圓定義知 $\overline{AF_1}+\overline{AF_2}=2a$

且 $\overline{BF_1}+\overline{BF_2}=2a$

$\triangle ABF_2$ 周長為 $\overline{AB}+\overline{AF_2}+\overline{BF_2}$

$=\overline{AF_1}+\overline{BF_1}+\overline{AF_2}+\overline{BF_2}$

$=2a+2a=4a=16$

$\therefore$ 橢圓 $\Gamma$ 的長軸長 $2a=8$

故選(2)。

13. $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{4}=1$

出處：選修數學甲〈二次曲線〉

目標：橢圓的方程式

解析：由 12. 知 $a=4$

又長軸長為短軸長的 2 倍

$\Rightarrow 2a=2\cdot(2b)$

$\Rightarrow a=2b=4\Rightarrow b=2$

因此橢圓 $\Gamma$ 的方程式為 $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{4}=1$。

◎評分原則

由 12. 知 $a=4$

又長軸長為短軸長的 2 倍

$\Rightarrow 2a=2\cdot(2b)$

$\Rightarrow a=2b=4$

$\Rightarrow b=2$　(2 分)

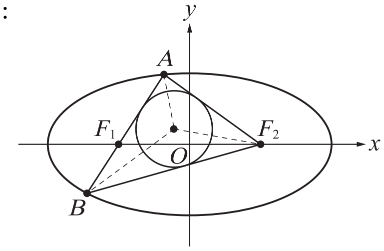
因此橢圓 $\Gamma$ 的方程式為 $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{4}=1$。　(1 分)

14. $\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$

出處：第二冊〈三角比〉、選修數學甲〈二次曲線〉

目標：三角形面積的計算、橢圓的基本性質

解析：




設 $\triangle ABF_2$ 的內切圓半徑為 $r$

則 $r^2\pi=\pi\Rightarrow r=1$

又 $\overline{F_1F_2}=2\sqrt{a^2-b^2}=4\sqrt{3}$

$\triangle ABF_2$ 面積$=\dfrac{1}{2}(\overline{AB}\times r+\overline{AF_2}\times r+\overline{BF_2}\times r)$

$=\dfrac{1}{2}\times 16\times 1=8$

另一方面，

$\triangle ABF_2$ 面積$=\triangle AF_1F_2$ 面積$+\triangle BF_1F_2$ 面積

$=\dfrac{1}{2}\times\overline{F_1F_2}\times|y_1|+\dfrac{1}{2}\times\overline{F_1F_2}\times|y_2|$

$=\dfrac{1}{2}\times\overline{F_1F_2}\times(|y_1|+|y_2|)$

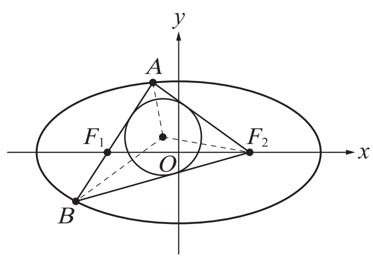
$=\dfrac{1}{2}\times 4\sqrt{3}\times(|y_1-y_2|)$

($\because A$、$B$ 在 $x$ 軸異側)

$\Rightarrow 8=2\sqrt{3}\,|y_1-y_2|$

$\Rightarrow |y_1-y_2|=\dfrac{4}{\sqrt{3}}=\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$ 。

◎評分原則




設$\triangle ABF_2$ 的內切圓半徑為 $r$

則 $r^2\pi=\pi\Rightarrow r=1$

又 $\overline{F_1F_2}=2\sqrt{a^2-b^2}=4\sqrt{3}$ (2 分)

$\triangle ABF_2$ 面積$=\dfrac{1}{2}(\overline{AB}\times r+\overline{AF_2}\times r+\overline{BF_2}\times r)$

$=\dfrac{1}{2}\times 16\times 1=8$ (2 分)

另一方面，

$\triangle ABF_2$ 面積$=\triangle AF_1F_2$ 面積$+\triangle BF_1F_2$ 面積

$=\dfrac{1}{2}\times\overline{F_1F_2}\times|y_1|+\dfrac{1}{2}\times\overline{F_1F_2}\times|y_2|$

$=\dfrac{1}{2}\times\overline{F_1F_2}\times(|y_1|+|y_2|)$

$=\dfrac{1}{2}\times 4\sqrt{3}\times(|y_1-y_2|)$ (1 分)

($\because A$、$B$ 在 $x$ 軸異側)

$\Rightarrow 8=2\sqrt{3}\,|y_1-y_2|$

$\Rightarrow |y_1-y_2|=\dfrac{4}{\sqrt{3}}=\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$ 。 (1 分)

15. 1

出處：第一冊〈直線與圓〉

目標：直線的斜率、圓的標準式

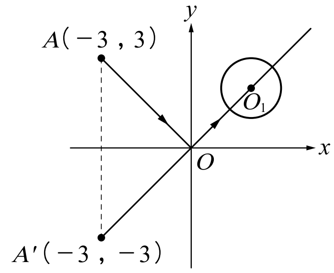
解析：圓 $C$：$x^2+y^2-4x-4y+7=0$

$\Rightarrow (x-2)^2+(y-2)^2=1$

$\therefore$圓心為 $O_1(2,2)$，半徑 $r=1$

作 $A(-3,3)$ 關於 $x$ 軸的對稱點 $A'(-3,-3)$

所有的反射光線延伸後都會過點 $A'$，如下圖




$\because$反射光線過圓心 $O_1(2,2)$ 與 $A'(-3,-3)$

故斜率為 $\dfrac{2-(-3)}{2-(-3)}=1$。

◎評分原則

圓 $C$：$x^2+y^2-4x-4y+7=0$

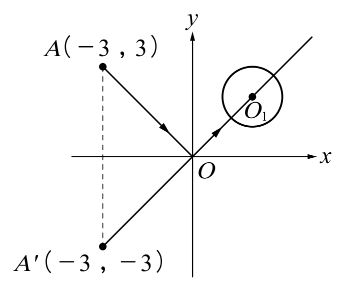
$\Rightarrow (x-2)^2+(y-2)^2=1$

$\therefore$圓心為 $O_1(2,2)$，半徑 $r=1$ (1 分)

作 $A(-3,3)$ 關於 $x$ 軸的對稱點 $A'(-3,-3)$

所有的反射光線延伸後都會過點 $A'$，

如下圖




$\because$反射光線過圓心 $O_1(2,2)$ 與 $A'(-3,-3)$ (2 分)

故斜率為 $\dfrac{2-(-3)}{2-(-3)}=1$。 (1 分)

16. $5\sqrt{2}-1$

出處：第一冊〈直線與圓〉

目標：點與圓的關係

解析：$\because$光線反射照到圓 $C$ 後被吸收

$\therefore$光線經過的最短路徑就是 $A'(-3,-3)$ 到圓 $C$ 的最短距離為 $\overline{A'O_1}-r=5\sqrt{2}-1$。

17. $\left(-\dfrac{3}{4},1\right)$

出處：第一冊〈直線與圓〉

目標：圓的切線方程式

解析：設過點 $A'$ 且與圓 $C$ 相切的直線方程式為

$y+3=m(x+3)$，$m$ 為斜率

$\Rightarrow mx-y+3m-3=0$

$\because$圓心到切線的距離等於半徑

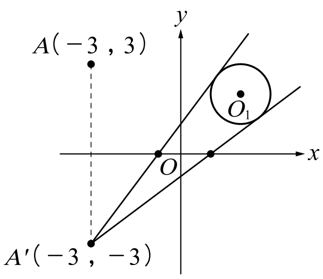
$\therefore \dfrac{|2m-2+3m-3|}{\sqrt{m^2+1}}=1$

$\Rightarrow |5m-5|=\sqrt{m^2+1}$

$\Rightarrow 25m^2-50m+25=m^2+1$

$\Rightarrow m=\dfrac{3}{4}$ 或 $\dfrac{4}{3}$

$\therefore$切線方程式為 $y+3=\dfrac{3}{4}(x+3)$ 與 $y+3=\dfrac{4}{3}(x+3)$




這兩條切線與 $x$ 軸的交點分別為 $(1\ ,0)$ 和 $\left(-\dfrac{3}{4}\ ,0\right)$

所求為 $-\dfrac{3}{4}\leq x\leq 1$

故數對 $(a\ ,b)=\left(-\dfrac{3}{4},1\right)$。

◎評分原則

設過點 $A'$ 且與圓 $C$ 相切的直線方程式為

$y+3=m(x+3)$，$m$ 為斜率

$\Rightarrow mx-y+3m-3=0$

$\because$圓心到切線的距離等於半徑

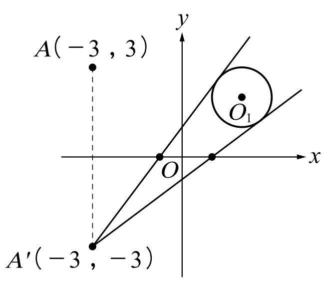
$\therefore \dfrac{|2m-2+3m-3|}{\sqrt{m^2+1}}=1$

$\Rightarrow |5m-5|=\sqrt{m^2+1}$　(1 分)

$\Rightarrow 25m^2-50m+25=m^2+1$

$\Rightarrow m=\dfrac{3}{4}$ 或 $\dfrac{4}{3}$　(1 分)

$\therefore$切線方程式為 $y+3=\dfrac{3}{4}(x+3)$ 與 $y+3=\dfrac{4}{3}(x+3)$




這兩條切線與 $x$ 軸的交點分別為 $(1\ ,0)$ 和 $\left(-\dfrac{3}{4}\ ,0\right)$　(1 分)

所求為 $-\dfrac{3}{4}\leq x\leq 1$

故數對 $(a\ ,b)=\left(-\dfrac{3}{4},1\right)$。　(1 分)