

全國公私立 111 學年度分科測驗第六次數學甲



第壹部分：選擇(填)題(占 76 分)

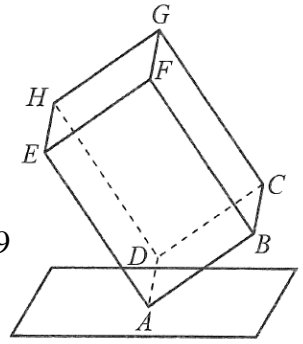
一、單選題(占 18 分)

- 中央流行疫情指揮中心宣布「快篩試劑實名制」上路，民眾需憑健保卡購買，為了分流購買人潮避免群眾感染，購買規則如下：
規則一：若身分證尾碼為奇數者，可在星期一、三、五購買；若為偶數者，則可在星期二、四、六購買，禮拜日則無限制。
規則二：每人每周僅能購買一次且同一家庭一天只能購買一份。
今已知阿良、阿璋、阿文三人為同住之親兄弟，身分證尾碼分別為偶數、偶數、奇數，若三兄弟欲在本星期購買快篩(快篩充足)，則有幾種購買方式？
(1) 18 (2) 24 (3) 36 (4) 42 (5) 48
- 設矩陣 $M_k = \begin{bmatrix} \cos k^\circ & \sin k^\circ \\ \sin k^\circ & -\cos k^\circ \end{bmatrix}$ ，若坐標平面上有一點 $P(x, y)$ 滿足 $M_{112} \cdots M_2 M_1 \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ ，則 P 點的位置為下列哪一個選項？
(1) 第一象限 (2) 第二象限 (3) 第三象限 (4) 第四象限 (5) x 軸或 y 軸上
- 當溶液中氫離子的濃度 r (莫耳/升)，定義溶液的酸鹼 pH 值為 $-\log r$ ，已知純水的氫離子濃度 $r = 10^{-7}$ (莫耳/升)，且正常人體血液的 pH 值為 7.4，若高於 7.5 或低於 7.3，就會有昏迷甚至死亡的危險。設 $t = \frac{\text{血液中氫離子濃度}}{\text{純水氫離子濃度}}$ ，則下列哪一個選項的 t 值為安全值？ (1) $\frac{1}{7}$ (2) $\frac{2}{7}$ (3) $\frac{3}{7}$ (4) $\frac{4}{7}$ (5) $\frac{5}{7}$

二、多選題(占 40 分)

- 設 a, b 為實數，若 $y = f(x) = x^3 - 2x + 1$ 與 $y = g(x) = ax + b$ 的函數圖形在坐標平面上有三個相異交點 P, Q, R ，且已知 $\overline{PQ} = \overline{QR}$ ，則下列選項哪些正確？
(1) 函數 $y = f(x)$ 的對稱中心為 $(0, 1)$ (2) $b = 1$ (3) a 可能為 -3
(4) 當 a 由 0 開始增加， \overline{PQ} 之值亦增加 (5) 當 $a = 2$ ，此時的 $\overline{PQ} = 2\sqrt{5}$
- 某學校舉辦學科能力競試，共測驗物理與數學兩個科目，其成績分別以 x, y 表示，教務處統計出以下資料：物理成績的算術平均數為 μ_x ，標準差為 σ_x ，數學成績的算術平均數為 μ_y ，標準差為 σ_y ，若 y 對 x 的迴歸直線(最適直線)為 $y = \frac{2}{3}x + 16$ 且 $\mu_x = 42$ 分且 $\sigma_y > \sigma_x$ ，今數學測驗中某題有誤，以致所有的考生統一加 5 分，即新的數學成績 $y' = y + 5$ ，則下列選項哪些正確？ (1) 調整後數學成績的平均為 44 分 (2) 調整後數學成績的標準差不變
(3) 物理成績與調整前數學成績的相關係數大於 0
(4) 物理成績與調整後數學成績的相關係數為 $\frac{2}{3}$
(5) 調整後數學成績對物理成績的迴歸直線(最適直線)為 $y = \frac{2}{3}x + 16$

6. 空間坐標系中，將長方體 $ABCD-EFGH$ 的其中一個頂點 A 放置於桌面上(視為 xy 平面)，如圖(1)所示。已知此長方體的三邊長別為 3, 9, 18 時，若 A 點坐標為 $(3, 4, 0)$ 且與 A 相鄰兩頂點的坐標分別為 $B(6, -2, 6)$ 與 $D(5, 6, 1)$ ，則下列選項哪些正確？



圖(1)

- (1) $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}$ (2) $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}$
 (3) F 點坐標為 $(24, -11, 24)$ (4) 此長方體的最高點與地面的距離為 19
 (5) \overrightarrow{AG} 與桌面的銳夾角為 60°

7. 坐標平面上，圓 C 為三角形 ABC 的內切圓，若圓心為 I 且已知 $A(2, -4)$ ，又

$\overleftrightarrow{IB} : x + y - 2 = 0, \overleftrightarrow{IC} : x - 3y - 6 = 0$ ，則下列選項哪些正確？

- (1) \overleftrightarrow{IB} 為 $\angle ABC$ 的角平分線 (2) A 點對 \overleftrightarrow{IB} 的對稱點為 $(8, -2)$
 (3) 若 A' 為 A 點對 \overleftrightarrow{IB} 的對稱點，則 A' 必定在 \overleftrightarrow{BC} 上 (4) $\overleftrightarrow{BC} : 2x + 7y = 2$
 (5) 圓 C 的方程式為 $x^2 + y^2 - 6x + 2y + 8 = 0$

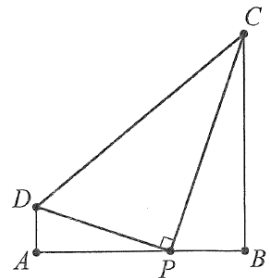
8. $\triangle ABC$ 中， $\overline{AB} = 1, \overline{AC} = 2, \angle BAC = 60^\circ$ ，若 P 點滿足 $\overrightarrow{AP} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}$ ， x, y 為實數，則下列選項哪些正確？

- (1) 若 $x = 1$ ，則所有的 P 點所形成的圖形為一射線
 (2) 若 $x + y = 1$ ，則所有的 P 點必落在 \overline{BC} 上
 (3) 若 x, y 均為正數，且 $x = 2y$ ，則所有的 P 點形成 $\angle BAC$ 的角平分線
 (4) 若 $-1 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 2$ ，則所有 P 點所形成的圖形面積為 $6\sqrt{3}$
 (5) 若 $x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 2$ ，則所有 P 點所形成的圖形面積為 $4\sqrt{3}$

三、選填題 (占 18 分)

9. 某電視綜藝節目中，有一個「你選我猜」的遊戲，遊戲規則如下，參賽者從 1 到 5 中任意選擇兩個數字，然後主持人開始一次一個數字猜測(若猜過便不會再猜相同的數字)當主持人猜中參賽者所選的兩個數字時，遊戲即停止，當遊戲停止時，主持人若共猜了 n 次，則參賽者可以獲得獎金 $nx \times 1000$ 元，試問參賽者玩一次這個遊戲，獲得獎金的期望值為_____元。

10. 如圖(2)，梯形 $ABCD$ 中， $\overline{AB} \perp \overline{AD}$ 且 $\overline{AB} \perp \overline{BC}$ ， P 為 \overline{AB} 上的動點且滿足 $\angle CPD = 90^\circ$ ，若 $\overline{AB} = 14$ ， $\overline{AD} = 3$ ，求 $\triangle CPD$ 的最大面積為_____。



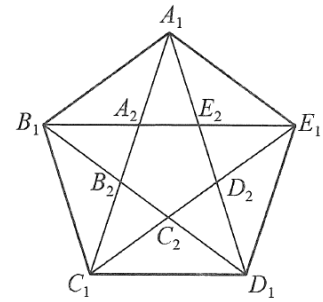
圖(2)

11. 設 $1, z, z^2, \dots, z^{n-1}$ 為方程式 $x^n = 1$ 的 n 個相異複數根，且 $1, z, z^2, \dots, z^{n-1}$ 在複數平面對應的點坐標分別為 $P_0, P_1, P_2, \dots, P_{n-1}$ ，若 $\angle P_6 P_{15} P_3 = \frac{\pi}{36}$ ，則 $n =$ _____。

第貳部分：混合題或非選擇題(占 24 分)

12-14 題為題組

在一個正五邊形中，將其對角線全部連接起來，即為一個正五角星，其中五個邊彼此的交點(除了在原正五邊形頂點)又成為一個新的正五邊形，相傳古希臘的畢達哥拉斯學派(school of Pythagoras)將正五角星視為完美的圖形並把它當作學派的標記。圖(3)為一個正五邊形連接而成的正五角星 $A_1B_1C_1D_1E_1$ ，



圖(3)

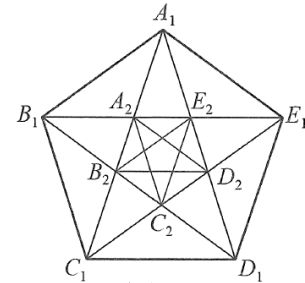
若 $\overline{A_1B_1} = 1$ ，試回答下列問題： $(\sin 18^\circ = \frac{\sqrt{5}-1}{4}, \cos 18^\circ = \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4})$

12. 正五邊形 $A_1B_1C_1D_1E_1$ 的外接圓面積為_____。(化為最簡根式)(選填題，3 分)

13. 下列哪一個選項可以表示 $\overline{A_2B_2}$ ？(單選題，3 分)

- (1) $2 \tan 36^\circ$ (2) $2 \sin 18^\circ$ (3) $4 \sin^2 18^\circ$ (4) $4 \cos^2 18^\circ$ (5) $4 \sin 18^\circ \cos 36^\circ$

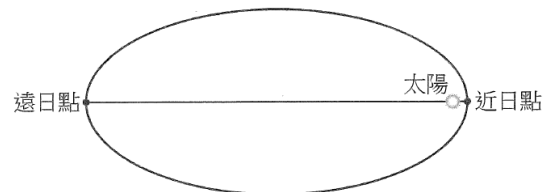
14. 將正五邊形 $A_2B_2C_2D_2E_2$ 繼續連接成正五角星，並以此規律持續作圖。若定義 $a_1 = \overline{A_1B_1} = 1, a_2 = \overline{A_2B_2}, \dots, a_n = \overline{A_nB_n}$ ，則 $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_1 + a_2 + \dots + a_n)$ 之值為何？(非選擇題，6 分)



圖(4)

15-17題為題組

德國天文學家、數學家克卜勒(1571~1630)，他提出的著名的行星運動三大定律，又稱克卜勒定律。其中第一定律又稱橢圓定律，其內容為：每一個行星都沿各自的橢圓軌道繞恆星公轉，恆星位在此橢圓的一個焦點上。已知有一小行星繞太陽的軌道是以太陽為焦點的橢圓，在橢圓長軸的兩頂點中，距離太陽最近的點稱為近日點，距離太陽最遠的點稱為遠日點，已知此小行星軌道上的近日點與遠日點的距離比起1:25，如圖(5)所示，試回答下列問題：



圖(5)

15. 試求出此插圖的長軸長與短軸長的比值為_____。(化為最簡分數)(選填題，3分) [

16. 觀測站為了方便估計小行星的軌跡，便以太陽為坐標的原點，近日點定為坐標(1,0)，遠日點定為坐標(-25,0)，則小行星的坐標可以用下列哪一個選項表示？(單選題，3分)

- (1) $(5 \cos \theta, \sin \theta), 0 \leq \theta < 2\pi$ (2) $(5 \cos \theta - 13, 4 \sin \theta), 0 \leq \theta < 2\pi$
 (3) $(12 \cos \theta - 12.5 \sin \theta), 0 \leq \theta < 2\pi$ (4) $(13 \cos \theta - 12.5 \sin \theta), 0 \leq \theta < 2\pi$
 (5) $(15 \cos \theta - 12, 12 \sin \theta), 0 \leq \theta < 2\pi$

17. 經觀測站測量後，近日點與太陽的距離為70萬公里，若設太陽位置為 F_1 ，近日點為 A ，遠日點為 B ，則當此小行星於 P 點時， $\angle PF_1B = 60^\circ$ ，試求小行星與太陽的距離為何？

(非選擇題，6分)

RA6109 全國公私立 111 學年度分科測驗第六次數學甲

參考答案

選擇題：1.(4) 2.(4) 3.(3) 4.(1)(2)(4)(5) 5.(2)(3) 6.(1)(4) 7.(1)(3)(5) 8.(3)(4)

選填題：9. 4000 10. 75 11. 108

混合題或非選擇題：12. $\frac{5+\sqrt{5}}{10}\pi$ 13. (3) 14. $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$

15. $\frac{13}{5}$ 16. (4) 17. 250(萬公里)