全國公私立高級中學 111 學年度分科測驗第六次聯合模擬考試

數學甲考科解析

考試日期：112 年 4 月 12~13 日

1	2	3	4	5	6	7	8	9-1	9-2	9-3	9-4	10-1	10-2
4	4	3	1245	23	14	135	34	4	0	0	0	7	5
11-1	11-2	11-3	12-1	12-2	12-3	12-4	13	14	15-1	15-2	15-3	16	17
1	0	8	5	5	1	0	3		1	3	5	4	

第壹部分：選擇題

一、單選題

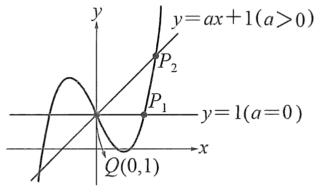
1. 依題意知，三兄弟分別在不同天購買快篩：
   (Ⅰ) 阿文在星期一、三、五購買：$3\times4\times3=36$；
   (Ⅱ) 阿文在星期日購買：$1\times3\times2=6$；
   由(Ⅰ)(Ⅱ)得總共有 $36+6=42$ 種購買方式，
   故選(4)。

2. $M_{112}\cdots M_2M_1=(M_{112}M_{111})(M_{110}M_{109})\cdots(M_2M_1)$
   $$=\begin{bmatrix}\cos1^\circ & -\sin1^\circ\\ \sin1^\circ & \cos1^\circ\end{bmatrix}^{56}=\begin{bmatrix}\cos56^\circ & -\sin56^\circ\\ \sin56^\circ & \cos56^\circ\end{bmatrix}$$
   $$\begin{bmatrix}\cos56^\circ & -\sin56^\circ\\ \sin56^\circ & \cos56^\circ\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix},$$
   （即 $P(x,y)$ 以 $O(0,0)$ 為中心順時針旋轉 56° 後為 $(1,0)$）
   $$\Rightarrow\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos56^\circ & -\sin56^\circ\\ \sin56^\circ & \cos56^\circ\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}$$
   $$=\begin{bmatrix}\cos56^\circ & \sin56^\circ\\ -\sin56^\circ & \cos56^\circ\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos56^\circ\\ -\sin56^\circ\end{bmatrix},$$
   （即 $P(x,y)$ 為 $(1,0)$ 以 $O(0,0)$ 為中心逆時針旋轉 56°）
   因此 $P(\cos56^\circ,-\sin56^\circ)$ 落在第四象限，
   故選(4)。

3. 由 $7.3<-\log r<7.5\Rightarrow-\log10^{-7.3}<-\log r<-\log10^{-7.5}$
   $\Rightarrow10^{-7.5}<r<10^{-7.3}\Rightarrow\dfrac{10^{-7.5}}{10^{-7}}<\dfrac{r}{10^{-7}}<\dfrac{10^{-7.3}}{10^{-7}}$
   $\Rightarrow10^{-0.5}<t<10^{-0.3}\Rightarrow-0.5<\log t<-0.3$
   (1) $\log\dfrac{1}{7}=-\log7=-0.8451$ (危險)。
   (2) $\log\dfrac{2}{7}=-(\log2-\log7)=-0.5441$ (危險)。
   (3) $\log\dfrac{3}{7}=-(\log3-\log7)=-0.3680$ (安全)。
   (4) $\log\dfrac{4}{7}=-(\log4-\log7)=-0.2431$ (危險)。
   (5) $\log\dfrac{5}{7}=-(\log5-\log7)=-0.1461$ (危險)。
   故選(3)。

二、多選題

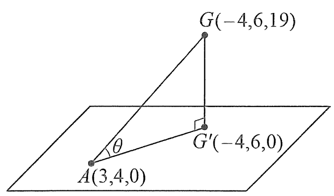
4. (1) ○：$f(x)=(x-0)^3-2(x-0)+1$，對稱中心為 $(0,1)$。
   (2) ○：因為 $\overline{PQ}=\overline{QR}$，
   所以 Q 點為 $f(x)$ 的對稱中心 $(0,1)$，
   將 $Q(0,1)$ 代入 $y=ax+b$ 得 $b=1$
   (3) ×：已知 $y=g(x)=ax+1$，若 $a=-3$，此時解聯立方程式
   $\begin{cases}y=x^3-2x+1\\ y=-3x+1\end{cases}\Rightarrow x^3-2x+1=-3x+1\Rightarrow x^3+x=0$
   $\Rightarrow x(x^2+1)=0$ 僅有 $x=0$ 一個實數解，
   即 $y=f(x)$ 與 $y=g(x)$ 只有一個交點 $(0,1)$
   與題意不合。
   (4) ○：如下圖所示，$\overline{P_2Q}>\overline{P_1Q}$，故正確。



   (5) ○：$\begin{cases}y=x^3-2x+1\\ y=2x+1\end{cases}\Rightarrow x^3-4x=0\Rightarrow x(x-2)(x+2)=0$
   得交點為 $Q(0,1)$, $P(2,5)$, $R(-2,-3)$
   此時 $\overline{PQ}=\sqrt{2^2+4^2}=2\sqrt5$。
   故選(1)(2)(4)(5)。

5. 新的數學成績為 y'、算術平均數為 $\mu_{y'}$、標準差為 $\sigma_{y'}$
   (1) ×：$\mu_y=\dfrac{2}{3}\mu_x+16=\dfrac{2}{3}\times42+16=44$ (分)
   $\Rightarrow\mu_{y'}=\mu_y+5=44+5=49$ (分)。
   (2) ○：資料平移不會影響標準差，故 $\sigma_{y'}=\sigma_y$。
   (3) ○：迴歸線斜率 $\dfrac{2}{3}=r_{(x,y)}\times\dfrac{\sigma_y}{\sigma_x}\Rightarrow r_{(x,y)}=\dfrac{2}{3}\times\dfrac{\sigma_x}{\sigma_y}>0$。
   (4) ×：$r_{(x,y')}=r_{(x,y)}=\dfrac{2}{3}\times\dfrac{\sigma_x}{\sigma_y}<\dfrac{2}{3}\times1$。
   (5) ×：由 $y'=y+5\Rightarrow y=y'-5$ 代入 $y=\dfrac{2}{3}x+16$ 得
   $y'-5=\dfrac{2}{3}x+16$，故所求為 $y=\dfrac{2}{3}x+21$。
   故選(2)(3)。

6. (1) ○：$\overrightarrow{AG}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CG}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE}$
   (2) ×：$\overrightarrow{AE}=18\left(\dfrac{\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AD}}{|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AD}|}\right)=18\left(\dfrac{(-18,9,18)}{27}\right)$
   $=(-12,6,12)$
   (3) ×：$F=A+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BF}=A+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AE}$
   $=(3,4,0)+(3,-6,6)+(-12,6,12)$
   $=(-6,4,18)$
   (4) ○：最高點為 $G(-4,6,19)$，桌面（xy 平面）方程式為 $z=0$，則 $G(-4,6,19)$ 與桌面的距離為 19。
   (5) ×：如圖，將 $G(-4,6,19)$ 投影到 xy 平面上得 $G'(-4,6,0)$，設 $\overline{AG}$ 與 xy 平面的銳夾角為 θ，
   $\overline{AG'}=\sqrt{53}$、$\overline{GG'}=19$，
   則 $\tan\theta=\dfrac{19}{\sqrt{53}}>\sqrt3=\tan60^\circ\Rightarrow\theta>60^\circ$。



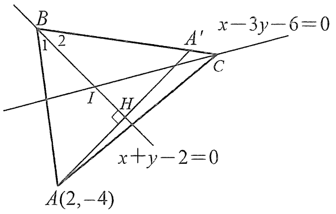
   故選(1)(4)。

7. (1) ○：因為 I 為 $\triangle ABC$ 之內切圓圓心，

所以 $\overleftrightarrow{IB}$ 為 $\angle ABC$ 的角平分線。

(2) ×：如下圖，作 $\overleftrightarrow{AH}$ 垂直 $\overleftrightarrow{IB}$ 於 H，則 $\overleftrightarrow{AH}$ ：$x-y-6=0$，

解 $\begin{cases} x+y-2=0 \\ x-y-6=0 \end{cases}$，得 $H(4,-2) \Rightarrow A'(6,0)$



(3) ○：如上圖，因為 $\angle 1=\angle 2$，

所以 A 對 $\overleftrightarrow{IB}$ 的對稱點 A' 在 $\overleftrightarrow{BC}$ 上。

(4) ×：由 A 對 $\overleftrightarrow{IC}$ 作對稱點得 $P(\frac{2}{5},\frac{4}{5})$，因為 P 在 $\overleftrightarrow{BC}$ 上，

所以利用 A', P 求得 $\overleftrightarrow{BC}$ ：$x+7y-6=0$。

(5) ○：解 $\begin{cases} x+y-2=0 \\ x-3y-6=0 \end{cases}$ 得內心 $I(3,-1)$，

其半徑 r 為 $d(I,\overleftrightarrow{BC})=\frac{10}{\sqrt{50}}=\sqrt{2}$，

所以 C：$x^2+y^2-6x+2y+8=0$。

故選(1)(3)(5)。

8. (1) ×：當 $x=1$ 時，$\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC} \Rightarrow \overrightarrow{BP}=y\overrightarrow{AC}$

可知所有 P 點為過 B 且平行 $\overline{AC}$ 的直線。

(2) ×：若 $x+y=1$，則 P 落在 $\overleftrightarrow{BC}$ 上。

(3) ○：若 $x=2y>0$，則 $\overrightarrow{AP}=2y\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$，

此時 $|2y\overrightarrow{AB}|=|y\overrightarrow{AC}|$，

因此 $\overrightarrow{AP}$ 平分 $\overrightarrow{AB}$ 與 $\overrightarrow{AC}$ 的夾角，

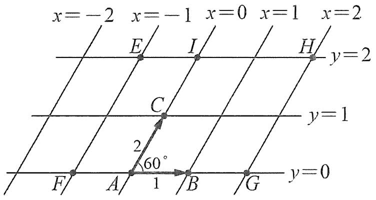
即所有的 P 點形成 $\angle BAC$ 的角平分線。

(4) ○：如下圖，所形成的區域為四邊形 $EFGH$，其面積為

$12\triangle ABC=12\times(\frac{1}{2}\times1\times2\times\sin 60°)=6\sqrt{3}$。

(5) ×：如下圖，所形成的區域為 $\triangle IAG$，其面積為

$4\triangle ABC=4\times(\frac{1}{2}\times1\times2\times\sin 60°)=2\sqrt{3}$。



故選(3)(4)。

三、選填題

9. 依題意知 $n=2,3,4,5$。

次數 n	情況	機率 $P(n)$
2	中中	$\frac{2}{5}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{10}$
3	沒中中中 中沒中中	$\frac{3}{5}\times\frac{2}{4}\times\frac{1}{3}\times2=\frac{2}{10}$
4	沒中沒中中中 沒中中沒中中 中沒中沒中中	$\frac{3}{5}\times\frac{2}{4}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}\times3=\frac{3}{10}$
5	沒中沒中沒中中中 沒中沒中中沒中中 沒中中沒中沒中中 中沒中沒中沒中中	$\frac{3}{5}\times\frac{2}{4}\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{2}\times\frac{1}{1}\times4=\frac{4}{10}$

所求期望值 $E=\frac{1}{10}\times2000+\frac{2}{10}\times3000+\frac{3}{10}\times4000+\frac{4}{10}\times5000$

$=\frac{40000}{10}=4000$ (元)。

10. 設 $\overline{AP}=x$ ，$\overline{BP}=14-x$ ，其中 $0<x<14$，

由 $\triangle ADP$ 與 $\triangle BCP$ 相似得 $\frac{3}{x}=\frac{14-x}{\overline{BC}} \Rightarrow \overline{BC}=\frac{x(14-x)}{3}$，

$\triangle CPD$ 面積＝梯形 $ABCD-\triangle ADP-\triangle BCP$

$=\frac{1}{2}\times(3+\frac{x(14-x)}{3})\times14-\frac{3}{2}x-\frac{x(14-x)^2}{6}$

$=-\frac{1}{6}x^3+\frac{7}{3}x^2-\frac{3}{2}x+21$。

令 $f(x)=-\frac{1}{6}x^3+\frac{7}{3}x^2-\frac{3}{2}x+21$，

$f'(x)=-\frac{1}{2}x^2+\frac{14}{3}x-\frac{3}{2}=-\frac{1}{6}(3x^2-28x+9)$

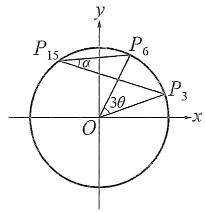
$=-\frac{1}{6}(3x-1)(x-9)$，

當 $x=9$ 時，$f(x)$ 有最大值 75，即 $\triangle CPD$ 的最大面積為 75。

11. 設 $z=\cos\theta+i\sin\theta\,(\theta=\frac{2\pi}{n})$，即 $P_1(\cos\theta,\sin\theta)$

$\Rightarrow P_3(\cos3\theta,\sin3\theta)$, $P_6(\cos6\theta,\sin6\theta)$

如右圖所示，



$\angle P_6P_{15}P_3$ 與 $\angle P_6OP_3$ 皆對應弧 P_3P_6

所以 $\angle P_6P_{15}P_3=\frac{3\theta}{2}=\frac{\pi}{36} \Rightarrow \theta=\frac{\pi}{54}$，

故 $n=\frac{2\pi}{\theta}=108$ 。

第貳部分、混合題或非選擇題

12. 設 $\overline{A_1O}=\overline{B_1O}=r$ ，由餘弦定理知

$\cos72°=\frac{r^2+r^2-1}{2\times r\times r}=\sin18°=\frac{\sqrt{5}-1}{4}$

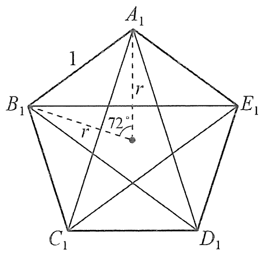
$\Rightarrow\frac{r^2+r^2-1}{2\times r\times r}=\frac{\sqrt{5}-1}{4}$

$\Rightarrow 4r^2-2=(\sqrt{5}-1)r^2$

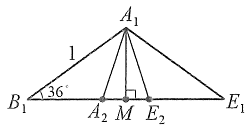
$\Rightarrow(5-\sqrt{5})r^2=2$

可得 $r^2=\frac{2}{5-\sqrt{5}}=\frac{5+\sqrt{5}}{10}$，

故外接圓面積 $r^2\pi=\frac{5+\sqrt{5}}{10}\pi$ 。



13. 由右圖知 $\overline{A_1M}=1\times\sin36°$



且 $\angle A_2A_1M=18°$

又 $\overline{A_2M}=\overline{A_1M}\times\tan18°$

故 $\overline{A_2M}=\overline{A_1M}\times\tan18°=1\times\sin36°\times\tan18°$

$=2\sin18°\cos18°\times\frac{\sin18°}{\cos18°}=2\sin^2 18°$

所求 $\overline{A_2B_2}=2\overline{A_2M}=4\sin^2 18°$，

故選(3)。

14. $\langle a_n\rangle=1, 4\sin^2 18°, (4\sin^2 18°)^2, \cdots\cdots$ 此數列為等比數列(1 分)，

且公比 $r=4\sin^2 18°=4(\frac{6-2\sqrt{5}}{16})=\frac{3-\sqrt{5}}{2}$ (2 分)，

所求 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_1+a_2+\cdots+a_n)=\lim\limits_{n\to\infty}[\frac{a_1(1-r^n)}{1-r}]$，

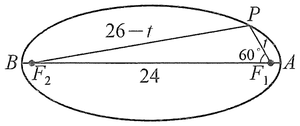
又 $|r|<1$ (1 分)，

故 $\lim\limits_{n\to\infty}[\frac{a_1(1-r^n)}{1-r}]=\frac{a_1}{1-r}=\frac{1}{1-(\frac{3-\sqrt{5}}{2})}=\frac{2}{\sqrt{5}-1}=\frac{\sqrt{5}+1}{2}$ (3 分)。

15. 令近日點為 A，遠日點為 B，太陽為 F，
$\Rightarrow \overline{AF}=r$ ， $\overline{BF}=25r\ (r>0)$，
則 $a=13r$ ， $c=13r-r=12r$ ，
可知 $b=\sqrt{a^2-c^2}=5r$ ，故 $\frac{2a}{2b}=\frac{13}{5}$ 。

16. 設遠日點為 $B(-25,0)$ ，近日點為 $A(1,0)$ ，
中心為 $(-12,0)$ ，則 $a=13$ ， $c=12$ ， $b=\sqrt{a^2-c^2}=5$
得小行星的軌跡方程式為 $\frac{(x+12)^2}{169}+\frac{y^2}{25}=1$ ，
參數式為 $\begin{cases} x=-12+13\cos\theta \\ y=5\sin\theta \end{cases}$ $(0\leq\theta<2\pi)$ ，
故選(4)。

17. 設橢圓兩焦點為 F_1 與 F_2，
此時小行星在 P 點，太陽在 F_1，近日點為 A，遠日點為 B，
如圖所示：



已知橢圓中 $a：c=13：12$
可設 $\overline{F_1F_2}=24$ ， $\overline{PF_1}=t$ ， $\overline{PF_2}=26-t$
由餘弦定理： $\cos 60^\circ=\frac{24^2+t^2-(26-t)^2}{2\times 24\times t}$ (2 分)
$\Rightarrow 24t=24^2+t^2-(26-t)^2 \Rightarrow 28t=100$ ， $t=\frac{25}{7}$ (2 分)，
又近日點與太陽的距離為 70 萬公里且 $\frac{\overline{PF_1}}{\overline{AF_1}}=\frac{t}{1}=t$ ，
故小行星與太陽的距離為 $\frac{25}{7}\times 70=250$ (萬公里) (2 分)。