

111 學年度全國高級中學分科測驗第七次模擬考數學甲(111-E7)



第壹部分：選擇(填)題(占 76 分)

一、單選題(占 18 分)

1. 隨著網際網路蓬勃發展，現代人與朋友的聯繫幾乎都仰賴通訊軟體。老師統計班上 6 位同學在某通訊軟體中參加的群組個數 x (單位：個)與每天上網時間 y (單位：小時)的資料如下表所示：

群組個數 x (個)	2	15	k	8	4	5
每天上網時間 y (小時)	3	12	5	7	1	4

已知 y 對 x 的迴歸直線(最適合直線)為 $L: y = \frac{4}{5}x$ 。若老師從這 6 為同學中機選出 2 位，以該生參加的群組個數及利用 y 對 x 的迴歸直線 L 推測其每天的上網時間，則至少有 1 位同學被推測出的每天上網時間與實際相同的機率為下列何者？

- (1) $\frac{1}{15}$ (2) $\frac{2}{5}$ (3) $\frac{8}{15}$ (4) $\frac{3}{5}$ (5) $\frac{2}{3}$

2. 教育部長宣布從 111 年 9 月起全面取消高中的早自習制度，第一節前不得強行要求學生到校，同時禁止考試等活動，學生要在早上 8 點 10 分前到校。在實施此制度之後，某班導師觀察班上的出席率，發現每天全班在第一節上課時(8 點 10 分)，無人遲到或缺席的機率為 $p(0 < p \leq 1)$ ，且每天的出席情形互不影響。設隨機變數 X 表示自 111 年 9 月起該班在第一節上課時，首次出現全班無人遲到或缺席所需的天數，若隨機變數 X 的期望值為 4 天，則該班至少 3 天(含)才在第一節上課時，首次出現全班無人遲到或缺席的機率為下列何者？

- (1) $\frac{1}{16}$ (2) $\frac{9}{64}$ (3) $\frac{3}{16}$ (4) $\frac{27}{64}$ (5) $\frac{9}{16}$

3. 海巡署的巡防艇在海上 A 點處進行巡邏時，監測到一艘可疑快艇位於東 30° 南的 B 點處，其距離為 $2\sqrt{3}$ 海浬。已知此艘快艇以每分鐘 1 海浬的速度持續向正東方遠離，且經過 n 分鐘後與 A 點距離 a_n 海浬，而與 B 點距離 b_n 海浬，其中 n 為正整數。

試求 $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n)$ 之值為下列何者？ (1) 0 (2) 1 (3) $\sqrt{3}$ (4) 4 (5) $2\sqrt{3}$

二、多選題(占 40 分)

4. 在坐標平面上，已知二階方陣 $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$ 所代表的線性變換可以將 A 點映射到 B 點。若

$\overline{AB} = 4$ ，則下列哪些選項中的坐標可能為 A 點坐標？

- (1) (4,0) (2) (-2,0) (3) $(\sqrt{3}, -1)$ (4) $(1, -\sqrt{3})$ (5) (3,1)

5. 設多項式 $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + 10$ ，其中 a, b 為實數。已知方程式 $f(x) = 0$ 有虛根 $1-i$ ，試選出正確的選項。(1) $f(-1-i) = 0$ (2) $f(x)$ 有 $x-5$ 的因式 (3) 若 $\alpha > 0$ ，則 $f(\alpha) > 0$ (4) $y = f(x)$ 圖形的對稱中心為 $(-1, 20)$ (5) $y = x^3 - 11x$ 的圖形可由 $y = f(x)$ 的圖形經適當平移得到

6. 在坐標空間中，已知點 $P(5, -1, 2)$ 在平面 $E: 2x - y + z = 1$ 上的投影點為 A ，且直線

$L: \frac{x-6}{a} = \frac{y+b}{c} = \frac{z+d}{-1}$ 落在平面 E 上。若 A 點在直線 L 上的投影點為 $B(m, 0, -3)$ ，試選出

正確的選項。(1) 直線 PB 與直線 L 垂直 (2) P 點到直線 L 的距離為 $\sqrt{35}$

- (3) $\overline{AB} = \sqrt{11}$ (4) $a+c = -1$ (5) $b+d = 3$

7. 斐村從 2, 5, 10, 20, 50, 100, 這六個數字中隨機取出一數 a 再從剩下的五個數字中隨機取出一數 b , 並計算 $\log a + \log b$ 之值。假設斐村並無計算錯誤的情形發生, 試選出正確的選項。 (1) 滿足 $\log a + \log b = 2$ 的數對 (a, b) 共有 2 組 (2) 滿足 $\log a + \log b$ 之值為整數的數對 (a, b) 共有 10 組 (3) $\log a + \log b$ 之值共有 12 種可能 (4) 已知 $\log a + \log b$ 之值為整數, 則 a 或 b 均不為 2 的機率為 $\frac{3}{5}$ (5) 已知 a 或 b 均不為 2, 則 $\log a + \log b$ 之值為整數的機率為 $\frac{1}{5}$

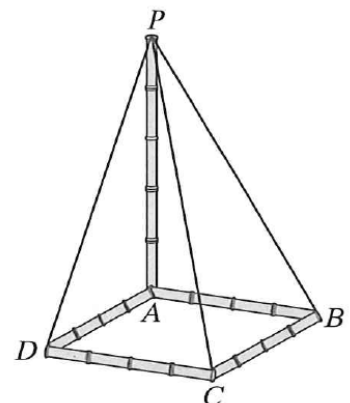
8. 在複數平面上, 設 O 原點, 且 A, B, P 別代表坐標為複數 z_1, z_2, z_3 的點。已知 $z_1 = \cos \theta_1 + i \sin \theta_1, z_2 = \cos \theta_2 + i \sin \theta_2, z_3 = \frac{12}{13} + \frac{5}{13}i$, 其中 $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ 分別表示 z_1, z_2, z_3 的主幅角, 且 $\theta_1 < \theta_2$ 。若 $z_3 = z_1 + z_2$, 試選出正確的選項。
 (1) \overrightarrow{OP} 平分 \overrightarrow{OA} 與 \overrightarrow{OB} 的夾角 (2) $|z_1 - z_3| < |z_1|$ (3) $|z_1 - z_2| = \sqrt{3}$
 (4) $\theta_1 + \theta_2 = \theta_3$ (5) $\tan(\theta_1 + \theta_2) = \frac{120}{119}$

三、選填題 (占 18 分)

9. 設 $k > 0$, 若將 $y = \log_2 x$ 的圖形鉛直伸縮 k 倍後可得 $y = \log x$ 的圖形, 則 $\left(\frac{1}{100}\right)^k =$ _____。(化為最簡分數)

10. 在坐標平面上, 設 $d > 0$, 已知圓 $\Gamma: x^2 + y^2 + dx + ey + f = 0$ 與 y 軸相切於原點 O 。若 P 為 y 軸上異於 O 之一點, 圓 Γ 的圓心為 M , 且 $\overrightarrow{MP} \cdot \overrightarrow{MO} = 64$, 則序組 $(d, e, f) =$ _____。

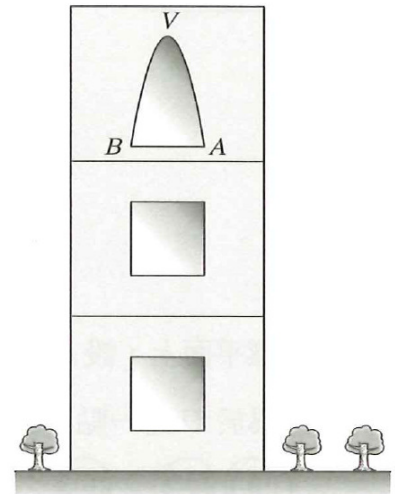
11. 童軍社每年都會舉辦跨校聯合大露營活動, 社員為了露營活動, 平時都會利用課餘時間積極學習打繩結的方法。如右圖, 幾位童軍社成員將 5 根竹竿利用童軍繩固定成一個四角錐 $P-ABCD$, 其中 $\overline{PB}, \overline{PC}, \overline{PD}$, 為 3 條筆直的童軍繩, 而底面是由 4 根長 $\sqrt{2}$ 公尺的竹竿所組成的正方形 $ABCD$ (即正方形的邊長為 $\sqrt{2}$ 公尺), 且長 2 公尺的竹竿 \overline{PA} 與底面 $ABCD$ 垂直。若 $\angle BPC = \theta$, 則 $\cos \theta =$ _____。
 (化為最簡根式)



第貳部分：混合題或非選擇題(占 24 分)

12-14 題為題組

捷斯預計興建一棟三樓透天厝，頂樓的窗戶為一扇拋物線造型的氣密窗，其示意圖如右。已知此拋物線 Γ 的對稱軸與底邊 \overline{AB} 垂直，設拋物線 Γ 的頂點 V 與底邊 \overline{AB} 的距離為 h 公尺，底邊 \overline{AB} 的長度為 a 公尺，其中 $a > 0$ ， $h > 0$ 。古希臘時期的阿基米德已證明拋物線 Γ 中的弓形 AVB 的面積等於 $\triangle AVB$ 面積的 $\frac{4}{3}$ 倍，即此扇拋物線造型的氣密窗面積為 $\frac{2ah}{3}$ 平方公尺，試回答下列問題：



12. 當 $a = 2, h = 3$ 時，拋物線 Γ 的焦距為_____公尺。
(化為最簡分數)(選填題，2 分)

13. 試利用定積分與面積的關係，證明此扇拋物線造型的氣密窗面積為 $\frac{2ah}{3}$ 平方公尺。
(非選擇題，4 分)

14. 在 $1 < h < 3$ 的範圍內，且滿足 $a = -h^2 + 4h - 3$ ，試求 h 為多少公尺時此扇拋物線造型的氣密窗面積最大。(非選擇題，6 分)

15-17 題為題組

設 n 為正整數，二階方陣 $A = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ ，且符號 A^n 代表矩陣 A 自乘 n 次。已知

$A^n = \begin{bmatrix} \left(\frac{1}{3}\right)^n & 0 \\ a_n & 1 \end{bmatrix}$ ，試回答下列問題：

15. 將 a_3 寫成一個 3 項的等比級數，並推測一般項 a_n 的公式。(非選擇題，4 分)
16. 承 15. 題，試利用數學歸納法驗證一般項 a_n 的推測結果。(非選擇題，6 分)
17. 試求 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ 之值。(非選擇題，2 分)

RA6110 111 學年度全國高級中學分科測驗第七次模擬考
數學甲(111-E7)

參考答案

選擇題：1.(4) 2.(5) 3.(4) 4.(1)(4) 5.(3)(4)(5) 6.(1)(2)(3) 7.(2)(4) 8.(1)(3)(5)

選填題：9. $\frac{1}{4}$ 10. (16,0,0) 11. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

混合題或非選擇題：12. $\frac{1}{12}$ 13. 略 14. $\frac{4+\sqrt{7}}{3}$ 公尺

15. $a_3 = 1 + \frac{1}{3} + \left(\frac{1}{3}\right)^2, a_n = \frac{3}{2} \left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n\right)$ 16. 略 17. $\frac{3}{2}$