

數學甲考科詳解

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.
(4)	(5)	(4)	(1)(4)	(3)(4)(5)	(1)(2)(3)	(2)(4)
8.						
(1)(3)(5)						

第壹部分、選擇(填)題

一、單選題

1. (4)

出處：第二冊〈數據分析〉、第二冊〈排列組合與機率〉

目標：迴歸直線與古典機率

解析：可知 $\mu_x = \frac{2+15+k+8+4+5}{6} = \frac{34+k}{6}$ ，

$$\mu_y = \frac{3+12+5+7+1+4}{6} = \frac{16}{3}$$

因為 y 對 x 的迴歸直線 $L: y = \frac{4}{5}x$ 必過點 (μ_x, μ_y) ，

$$\text{所以 } \frac{16}{3} = \frac{4}{5} \times \frac{34+k}{6} \Rightarrow k=6$$

可得下表

x	2	15	6	8	4	5
y	3	12	5	7	1	4

可知 $(15, 12), (5, 4)$ 兩點均位於 L 上

$$\begin{aligned} \text{所以 } P(\text{至少有 1 位推測正確}) &= \frac{C_1^2 C_1^4 + C_2^2}{C_6^2} \\ &= \frac{8+1}{15} = \frac{3}{5} \end{aligned}$$

故選(4)。

2. (5)

出處：選修數學甲(下)〈機率統計〉

目標：幾何分布及其期望值

解析：將全班無人遲到或缺席視為成功，

則成功的機率為 p ，

失敗的機率為 $1-p$ ，即 $X \sim G(p)$

$$\text{因為 } E(X) = \frac{1}{p} = 4, \text{ 所以 } p = \frac{1}{4}$$

因此可得

$$\begin{aligned} P(X \geq 3) &= \left(\frac{3}{4}\right)^2 \times \frac{1}{4} + \left(\frac{3}{4}\right)^3 \times \frac{1}{4} + \left(\frac{3}{4}\right)^4 \times \frac{1}{4} + \dots \\ &= \frac{\left(\frac{3}{4}\right)^2 \times \frac{1}{4}}{1 - \frac{3}{4}} \\ &= \frac{9}{16} \end{aligned}$$

故選(5)。

3. (4)

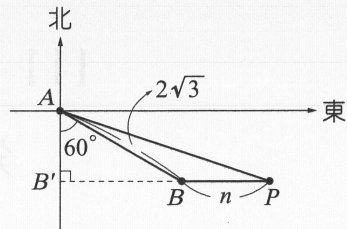
出處：第二冊〈三角比〉、選修數學甲(上)〈極限與函數〉

目標：直角三角形的邊角關係與數列的極限

解析：設此艘快艇經過 n 分鐘後位於 P 點，

$$\text{可知 } \overline{AP} = a_n, \overline{BP} = b_n = n$$

作圖如下



$$\text{可得 } \overline{AB'} = \overline{AB} \times \cos 60^\circ = 2\sqrt{3} \times \frac{1}{2} = \sqrt{3},$$

$$\overline{BB'} = \overline{AB} \times \sin 60^\circ = 2\sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 3$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow a_n &= \overline{AP} = \sqrt{\overline{AB'}^2 + \overline{B'P}^2} = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + (3+n)^2} \\ &= \sqrt{n^2 + 6n + 12} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + 6n + 12} - n)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{n^2 + 6n + 12} - n)(\sqrt{n^2 + 6n + 12} + n)}{\sqrt{n^2 + 6n + 12} + n}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6n + 12}{\sqrt{n^2 + 6n + 12} + n}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6 + \frac{12}{n}}{\sqrt{1 + \frac{6}{n} + \frac{12}{n^2}} + 1} = 3$$

故選(4)。

二、多選題

4. (1)(4)

出處：第一冊〈直線與圓〉、第四冊〈矩陣〉

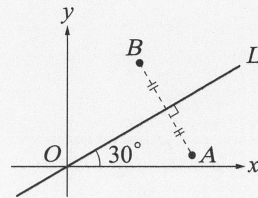
目標：點到直線的距離公式與鏡射矩陣

$$\text{解析：設 } A(a, b), \text{ 因為 } \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos 60^\circ & \sin 60^\circ \\ \sin 60^\circ & -\cos 60^\circ \end{bmatrix},$$

所以為鏡射矩陣

$$\text{其鏡射軸為 } L: y = (\tan 30^\circ)x \Rightarrow x - \sqrt{3}y = 0$$

作圖如下



$$\text{因此可得 } d(A, L) = \frac{1}{2} \overline{AB} = \frac{1}{2} \times 4 = 2$$

$$\Rightarrow \frac{|a - \sqrt{3}b|}{\sqrt{1^2 + (-\sqrt{3})^2}} = 2 \Rightarrow |a - \sqrt{3}b| = 4$$

$$(1) \bigcirc: |4 - \sqrt{3} \times 0| = 4$$

$$(2) \times: |-2 - \sqrt{3} \times 0| = 2 \neq 4$$

$$(3) \times: |\sqrt{3} - \sqrt{3} \times (-1)| = 2\sqrt{3} \neq 4$$

$$(4) \bigcirc: |1 - \sqrt{3} \times (-\sqrt{3})| = 4$$

$$(5) \times: |3 - \sqrt{3} \times 1| = 3 - \sqrt{3} \neq 4$$

故選(1)(4)。

5. (3)(4)(5)

出處：第一冊〈多項式函數〉、

選修數學甲(下)〈複數與多項式方程式〉

目標：虛根成對定理與三次函數的圖形

解析：(1)×：由虛根成對定理可知

$1+i$ 也是方程式 $f(x)=0$ 的根

又 $(x-(1-i))(x-(1+i))=x^2-2x+2$

所以 x^2-2x+2 為 $f(x)$ 的因式

利用長除法

$$\begin{array}{r} x + 5 \\ x^2 - 2x + 2 \overline{) x^3 + \quad a \quad x^2 + \quad b \quad x + 10} \\ \underline{x^3 - 2x^2 + 2x} \\ (a+2)x^2 + (b-2)x + 10 \\ \underline{5x^2 - 10x + 10} \\ 0 \end{array}$$

$$\text{可得 } \begin{cases} a+2=5 \\ b-2=-10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=3 \\ b=-8 \end{cases}$$

$$\Rightarrow f(x)=x^3+3x^2-8x+10=(x+5)(x^2-2x+2)$$

$$\Rightarrow f(-1-i) \neq 0$$

(2)×：承(1)可知， $x-5$ 不為 $f(x)$ 的因式

(3)○：承(1)可知， $f(x)=(x+5)(x^2-2x+2)$

因為對於任意實數 x ， $x^2-2x+2>0$ 恆成立

$$\text{所以當 } a>0 \text{ 時，可得 } \begin{cases} \alpha+5>0 \\ \alpha^2-2\alpha+2>0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow f(\alpha)=(\alpha+5)(\alpha^2-2\alpha+2)>0$$

(4)○：承(1)可知， $f(x)=x^3+3x^2-8x+10$

$$\text{其圖形對稱中心的 } x \text{ 坐標為 } -\frac{3}{3 \times 1} = -1$$

$$\text{又 } f(-1)=-1+3+8+10=20$$

所以對稱中心為 $(-1, 20)$

(5)○：承(4)並連續利用綜合除法

$$\begin{array}{r} 1 + 3 - 8 + 10 \quad | \quad -1 \\ - 1 - 2 + 10 \\ \hline 1 + 2 - 10 \quad | \quad + 20 \\ - 1 - 1 \\ \hline 1 + 1 \quad | \quad - 11 \\ - 1 \\ \hline 1 \quad | \quad + 0 \end{array}$$

可得 $f(x)=(x+1)^3-11(x+1)+20$ ，所以將 $y=f(x)$ 的圖形向右平移 1 單位，再向下平移 20 單位後得到 $y=x^3-11x$ 的圖形

故選(3)(4)(5)。

6. (1)(2)(3)

出處：第四冊〈空間向量〉、第四冊〈空間中的平面與直線〉

目標：三垂線定理、點到平面的距離公式、直線的比例式及點到直線的距離

解析：(1)○：由三垂線定理可知 $\overrightarrow{PB} \perp L$

(2)○：因為 $B(m, 0, -3)$ 位於 L 上，且 L 落在平面 E 上

$$\text{所以 } 2m-0-3=1 \Rightarrow m=2 \Rightarrow B(2, 0, -3)$$

$$\text{又 } \overrightarrow{PB} \perp L,$$

因此 $d(P, L)$

$$= \overline{PB}$$

$$= \sqrt{(5-2)^2 + (-1-0)^2 + (2-(-3))^2}$$

$$= \sqrt{35}$$

$$(3) \circ : \text{可知 } \overline{PA} = d(P, E) = \frac{|2 \times 5 - (-1) + 2 - 1|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 1^2}}$$

$$= \frac{12}{\sqrt{6}} = 2\sqrt{6}$$

$$\Rightarrow \overline{AB} = \sqrt{\overline{PB}^2 - \overline{PA}^2} = \sqrt{(\sqrt{35})^2 - (2\sqrt{6})^2} = \sqrt{11}$$

(4)×：設 $\overrightarrow{n} = (2, -1, 1)$ 為平面 E 的一組法向量，

承(2)可知 $\overrightarrow{PB} = (-3, 1, -5)$

$$\Rightarrow \overrightarrow{PB} \times \overrightarrow{n}$$

$$= \left(\begin{vmatrix} 1 & -5 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -5 & -3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \right) = (-4, -7, 1) \parallel (4, 7, -1)$$

所以 $\overrightarrow{t} = (4, 7, -1)$ 為直線 L 的一組方向向量，即 $a=4, c=7 \Rightarrow a+c=11$

(5)×：將 $B(2, 0, -3)$ 代入 L

$$\text{可得 } \frac{2-6}{4} = \frac{0+b}{7} = \frac{-3+d}{-1}$$

$$\Rightarrow b=-7, d=4 \Rightarrow b+d=-3$$

故選(1)(2)(3)。

7. (2)(4)

出處：第二冊〈排列組合與機率〉、

第三冊〈指數與對數函數〉、第四冊〈機率〉

目標：計數原理、組合、對數律及條件機率

解析：(1)×： $\log a + \log b = \log ab = 2$

$$\Rightarrow ab = 10^2 = 100, \text{ 討論如下}$$

a	2	5	20	50
b	50	20	5	2

所以共有 4 組

(2)○：設 $\log a + \log b = k \in Z$

$$\Rightarrow \log ab = k \Rightarrow ab = 10^k, \text{ 討論如下}$$

k	1	1	2	2	2	2	3	3	3	3
a	2	5	2	5	20	50	10	20	50	100
b	5	2	50	20	5	2	100	50	20	10

所以共有 10 組

(3)×：因為 $100=2 \times 50=5 \times 20, 200=2 \times 100=10 \times 20,$

$$500=5 \times 100=10 \times 50, 1000=10 \times 100=20 \times 50$$

$$\text{所以共有 } C_2^6 - 4 = 11 \text{ 種}$$

(4)○：承(2)可知，滿足 $\log a + \log b \in Z$ 的數對 (a, b) 共有 10 組，其中 a 或 b 均不為 2 的情形有 6

$$\text{組，所以其條件機率為 } \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$$

(5)×：承(2)可知，滿足 $\log a + \log b \in Z$ 且 a 或 b 均不為 2 的情形有 6 組，

$$\text{所以其條件機率為 } \frac{6}{5 \times 4} = \frac{3}{10}$$

故選(2)(4)。

8. (1)(3)(5)

出處：第二冊〈三角比〉、第三冊〈三角函數〉、
第三冊〈平面向量〉、

選修數學甲(下)〈複數與多項式方程式〉

目標：餘弦定理、二倍角公式、向量的線性組合、複數的絕對值與複數的極式

解析：(1) ○：因為 $z_3 = z_1 + z_2$

$$|z_1| = \sqrt{\cos^2 \theta_1 + \sin^2 \theta_1} = 1,$$

$$|z_2| = \sqrt{\cos^2 \theta_2 + \sin^2 \theta_2} = 1,$$

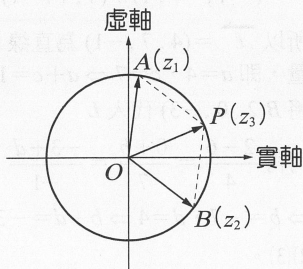
所以 $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$ ，且 $|\overrightarrow{OA}| = |\overrightarrow{OB}| = 1$

即 $\overrightarrow{OP}$ 平分 $\overrightarrow{OA}$ 與 $\overrightarrow{OB}$ 的夾角

$$(2) \times：因為 |z_3| = \sqrt{\left(\frac{12}{13}\right)^2 + \left(\frac{5}{13}\right)^2} = 1$$

承(1)可知， $|\overrightarrow{OP}| = |\overrightarrow{OA}| = |\overrightarrow{OB}| = 1$

且 $\angle AOP = \angle BOP$ ，作圖如下



所以 $|z_1 - z_3| = |\overrightarrow{PA}| = |\overrightarrow{OB}| = 1$

$$\Rightarrow |z_1 - z_3| = |z_1|$$

(3) ○：承(2)可知， $|\overrightarrow{OA}| = |\overrightarrow{OP}| = |\overrightarrow{PA}| = 1$

$$\Rightarrow \angle AOP = \angle BOP = \frac{\pi}{3} \Rightarrow \angle AOB = \frac{2\pi}{3}$$

由餘弦定理可得

$$\begin{aligned} |z_1 - z_2| &= |\overrightarrow{BA}| \\ &= \sqrt{|\overrightarrow{OA}|^2 + |\overrightarrow{OB}|^2 - 2|\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OB}|\cos \frac{2\pi}{3}} \\ &= \sqrt{1^2 + 1^2 - 2 \times 1 \times 1 \times \left(-\frac{1}{2}\right)} = \sqrt{3} \end{aligned}$$

(4) ×：承(3)可知， $\theta_1 = \theta_3 + \frac{\pi}{3}$ ， $\theta_2 = 2\pi - \left(\frac{\pi}{3} - \theta_3\right)$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \theta_1 + \theta_2 &= \left(\theta_3 + \frac{\pi}{3}\right) + \left(2\pi - \left(\frac{\pi}{3} - \theta_3\right)\right) \\ &= 2\theta_3 + 2\pi \end{aligned}$$

(5) ○：因為 $z_3 = \cos \theta_3 + i \sin \theta_3 = \frac{12}{13} + \frac{5}{13}i$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cos \theta_3 = \frac{12}{13} \\ \sin \theta_3 = \frac{5}{13} \end{cases} \Rightarrow \tan \theta_3 = \frac{\sin \theta_3}{\cos \theta_3} = \frac{5}{12}$$

所以承(4)可得，

$$\tan(\theta_1 + \theta_2) = \tan(2\theta_3 + 2\pi) = \tan 2\theta_3$$

$$= \frac{2 \tan \theta_3}{1 - \tan^2 \theta_3} = \frac{2 \times \frac{5}{12}}{1 - \left(\frac{5}{12}\right)^2} = \frac{120}{119}$$

故選(1)(3)(5)。

三、選填題

9. $\frac{1}{4}$

出處：第三冊〈指數與對數函數〉

目標：一般對數與常用對數的關係及指數律

解析：將 $y = \log_2 x$ 的圖形鉛直伸縮 k 倍後可得

$$y = k \log_2 x = k \times \frac{\log x}{\log 2} = \log x \Rightarrow k = \log 2$$

$$\text{故} \left(\frac{1}{100}\right)^k = 10^{-2k} = 10^{-2 \log 2} = 10^{\log(2^{-2})} = 10^{\log \frac{1}{4}} = \frac{1}{4}。$$

10. (16, 0, 0)

出處：第一冊〈直線與圓〉、第三冊〈平面向量〉

目標：圓與直線的關係及平面向量內積的幾何意義

解析：可知 $M\left(-\frac{d}{2}, -\frac{e}{2}\right)$ ，

其中 $d > 0$ ，作圖如右

所以半徑 $r = MO$

$$\Rightarrow \overrightarrow{MP} \cdot \overrightarrow{MO}$$

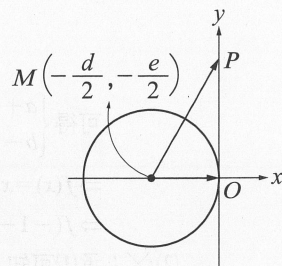
$$= |\overrightarrow{MP}| |\overrightarrow{MO}| \cos \angle PMO$$

$$= |\overrightarrow{MO}|^2 = r^2 = 64$$

$$\Rightarrow r = 8 \Rightarrow M(-8, 0)$$

$$\text{因此 } \Gamma: (x+8)^2 + y^2 = 64 \Rightarrow x^2 + y^2 + 16x = 0,$$

$$\text{故序組 } (d, e, f) = (16, 0, 0)。$$



11. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

出處：第四冊〈空間向量〉

目標：空間概念

解析：因為 $\overrightarrow{PA}$ 與底面 $ABCD$ 垂直，且 $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{BC}$ ，
所以由三垂線定理可得 $\angle PBC = 90^\circ$

$$\text{又 } \overrightarrow{AC} = \sqrt{\overrightarrow{AB}^2 + \overrightarrow{BC}^2} = \sqrt{(\sqrt{2})^2 + (\sqrt{2})^2} = 2$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{PC} = \sqrt{\overrightarrow{PA}^2 + \overrightarrow{AC}^2} = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2},$$

$$\overrightarrow{PB} = \sqrt{\overrightarrow{PA}^2 + \overrightarrow{AB}^2} = \sqrt{2^2 + (\sqrt{2})^2} = \sqrt{6}$$

$$\text{故 } \cos \theta = \frac{\overrightarrow{PB}}{\overrightarrow{PC}} = \frac{\sqrt{6}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2}。$$

〈另解〉

設 $A(0, 0, 0)$ ， $B(0, \sqrt{2}, 0)$ ， $C(\sqrt{2}, \sqrt{2}, 0)$ ，

$$D(\sqrt{2}, 0, 0)$$
， $P(0, 0, 2)$

$$\text{可得 } \overrightarrow{PB} = (0, \sqrt{2}, -2)，$$

$$\overrightarrow{PC} = (\sqrt{2}, \sqrt{2}, -2)$$

$$\Rightarrow \cos \theta = \frac{\overrightarrow{PB} \cdot \overrightarrow{PC}}{|\overrightarrow{PB}| |\overrightarrow{PC}|}$$

$$= \frac{0 \times \sqrt{2} + \sqrt{2} \times \sqrt{2} + (-2) \times (-2)}{\sqrt{0^2 + (\sqrt{2})^2 + (-2)^2} \times \sqrt{(\sqrt{2})^2 + (\sqrt{2})^2 + (-2)^2}}$$

$$= \frac{6}{\sqrt{6} \times \sqrt{8}}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2}。$$

第貳部分：混合題或非選擇題

12. $\frac{1}{12}$

出處：選修數學甲(下)〈二次曲線〉

目標：拋物線的方程式與其焦距

解析：設 $V(0, 3)$, $A(1, 0)$,

$$B(-1, 0),$$

$$\text{且 } \Gamma: x^2 = 4c(y-3)$$

作圖如右

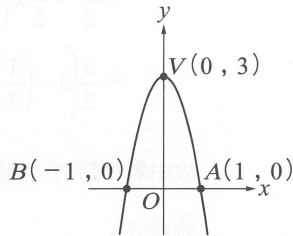
將 $A(1, 0)$

$$\text{代入 } x^2 = 4c(y-3)$$

$$\text{可得 } -12c = 1$$

$$\Rightarrow c = -\frac{1}{12}$$

$$\text{故 } \Gamma \text{ 的焦距為 } |c| = \frac{1}{12} \text{ 公尺}$$

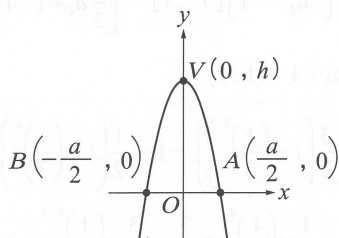


13. 略

出處：選修數學甲(上)〈積分〉

目標：定積分與面積

解析：設 $V(0, h)$, $A\left(\frac{a}{2}, 0\right)$, $B\left(-\frac{a}{2}, 0\right)$, 如下圖



$$\text{且 } \Gamma: y = k\left(x + \frac{a}{2}\right)\left(x - \frac{a}{2}\right)$$

$$\text{可得 } h = k\left(0 + \frac{a}{2}\right)\left(0 - \frac{a}{2}\right) = \frac{-ka^2}{4} \Rightarrow k = \frac{-4h}{a^2}$$

$$\Rightarrow \Gamma: y = \frac{-4h}{a^2}\left(x + \frac{a}{2}\right)\left(x - \frac{a}{2}\right)$$

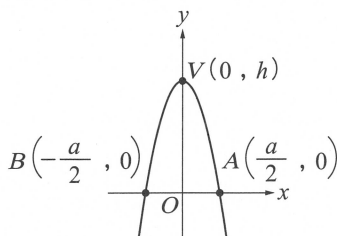
$$\Rightarrow y = \frac{-4h}{a^2}x^2 + h$$

所以氣密窗面積為

$$\begin{aligned} & \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \left(\frac{-4h}{a^2}x^2 + h \right) dx \\ &= 2 \int_0^{\frac{a}{2}} \left(\frac{-4h}{a^2}x^2 + h \right) dx = 2 \left(\frac{-4h}{3a^2}x^3 + hx \right) \Big|_0^{\frac{a}{2}} \\ &= 2 \left(\frac{-ah}{6} + \frac{ah}{2} \right) = \frac{2ah}{3} \text{ (平方公尺)}. \end{aligned}$$

◎評分原則

設 $V(0, h)$, $A\left(\frac{a}{2}, 0\right)$, $B\left(-\frac{a}{2}, 0\right)$, 如下圖



$$\text{且 } \Gamma: y = k\left(x + \frac{a}{2}\right)\left(x - \frac{a}{2}\right)$$

$$\text{可得 } h = k\left(0 + \frac{a}{2}\right)\left(0 - \frac{a}{2}\right) = \frac{-ka^2}{4} \Rightarrow k = \frac{-4h}{a^2}$$

$$\Rightarrow \Gamma: y = \frac{-4h}{a^2}\left(x + \frac{a}{2}\right)\left(x - \frac{a}{2}\right) \Rightarrow y = \frac{-4h}{a^2}x^2 + h$$

所以氣密窗面積為

$$\begin{aligned} & \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \left(\frac{-4h}{a^2}x^2 + h \right) dx \quad (2 \text{ 分}) \\ &= 2 \int_0^{\frac{a}{2}} \left(\frac{-4h}{a^2}x^2 + h \right) dx = 2 \left(\frac{-4h}{3a^2}x^3 + hx \right) \Big|_0^{\frac{a}{2}} \\ &= 2 \left(\frac{-ah}{6} + \frac{ah}{2} \right) = \frac{2ah}{3} \text{ (平方公尺)}. \quad (2 \text{ 分}) \end{aligned}$$

14. $\frac{4+\sqrt{7}}{3}$ 公尺

出處：選修數學甲(上)〈微分〉

目標：函數極值的判定法

解析：設此扇拋物線造型的氣密窗面積為

$$f(h) = \frac{2ah}{3} = \frac{2h}{3} \times (-h^2 + 4h - 3) = \frac{2}{3}(-h^3 + 4h^2 - 3h)$$

$$\text{可得 } f'(h) = \frac{2}{3}(-3h^2 + 8h - 3) = -2\left(h^2 - \frac{8}{3}h + 1\right)$$

$$= -2\left(h - \frac{4-\sqrt{7}}{3}\right)\left(h - \frac{4+\sqrt{7}}{3}\right),$$

列表如下

h	1	$\frac{4+\sqrt{7}}{3}$	3
$f'(h)$	+	0	-
$f(h)$		$\nearrow f\left(\frac{4+\sqrt{7}}{3}\right) \searrow$	

故 $h = \frac{4+\sqrt{7}}{3}$ 公尺時，此扇拋物線造型的氣密窗面積最大。

◎評分原則

設此扇拋物線造型的氣密窗面積為

$$f(h) = \frac{2ah}{3} = \frac{2h}{3} \times (-h^2 + 4h - 3) = \frac{2}{3}(-h^3 + 4h^2 - 3h) \quad (1 \text{ 分})$$

$$\text{可得 } f'(h) = \frac{2}{3}(-3h^2 + 8h - 3) = -2\left(h^2 - \frac{8}{3}h + 1\right)$$

$$= -2\left(h - \frac{4-\sqrt{7}}{3}\right)\left(h - \frac{4+\sqrt{7}}{3}\right), \quad (2 \text{ 分})$$

列表如下

h	1	$\frac{4+\sqrt{7}}{3}$	3
$f'(h)$	+	0	-
$f(h)$		$\nearrow f\left(\frac{4+\sqrt{7}}{3}\right) \searrow$	

(2 分)

故 $h = \frac{4+\sqrt{7}}{3}$ 公尺時，(1 分)

此扇拋物線造型的氣密窗面積最大。

$$15. a_3 = 1 + \frac{1}{3} + \left(\frac{1}{3}\right)^2, a_n = \frac{3}{2} \left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n\right)$$

出處：第二冊〈數列與級數〉、第四冊〈矩陣〉

目標：矩陣的乘法與等比級數求和公式

解析： $A = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow a_1 = 1$

$$A^2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left(\frac{1}{3}\right)^2 & 0 \\ 1 + \frac{1}{3} & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow a_2 = 1 + \frac{1}{3}$$

$$A^3 = A^2 A = \begin{bmatrix} \left(\frac{1}{3}\right)^2 & 0 \\ 1 + \frac{1}{3} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left(\frac{1}{3}\right)^3 & 0 \\ 1 + \frac{1}{3} + \left(\frac{1}{3}\right)^2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow a_3 = 1 + \frac{1}{3} + \left(\frac{1}{3}\right)^2$$

推測 $a_n = 1 + \frac{1}{3} + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$

$$= 1 \times \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{3}{2} \left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n\right)$$

◎評分原則

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow a_1 = 1$$

$$A^2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left(\frac{1}{3}\right)^2 & 0 \\ 1 + \frac{1}{3} & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow a_2 = 1 + \frac{1}{3}$$

$$A^3 = A^2 A = \begin{bmatrix} \left(\frac{1}{3}\right)^2 & 0 \\ 1 + \frac{1}{3} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left(\frac{1}{3}\right)^3 & 0 \\ 1 + \frac{1}{3} + \left(\frac{1}{3}\right)^2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow a_3 = 1 + \frac{1}{3} + \left(\frac{1}{3}\right)^2 \quad (2 \text{ 分})$$

推測 $a_n = 1 + \frac{1}{3} + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \quad (1 \text{ 分})$

$$= 1 \times \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{3}{2} \left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n\right) \quad (1 \text{ 分})$$

16. 略

出處：第二冊〈數列與級數〉

目標：數學歸納法

解析：當 $n=1$ 時， $a_1 = \frac{3}{2} \left(1 - \frac{1}{3}\right) = \frac{3}{2} \times \frac{2}{3} = 1$ ，此式成立

設 $n=k$ 時成立，即 $a_k = \frac{3}{2} \left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^k\right)$

則 $n=k+1$ 時，

$$A^{k+1} = A^k A = \begin{bmatrix} \left(\frac{1}{3}\right)^k & 0 \\ a_k & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left(\frac{1}{3}\right)^{k+1} & 0 \\ \frac{1}{3} a_k + 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow a_{k+1} = \frac{1}{3} a_k + 1$$

$$= \frac{1}{3} \left(\frac{3}{2} \left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^k\right) \right) + 1 = \frac{1}{2} \left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^k\right) + 1$$

$$= \frac{3}{2} - \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{3}\right)^k = \frac{3}{2} - \frac{3}{2} \times \left(\frac{1}{3}\right)^{k+1}$$

$$= \frac{3}{2} \left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{k+1}\right), \text{ 此式成立}$$

故由數學歸納法得證 $a_n = \frac{3}{2} \left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n\right)$ 對所有正整數

皆成立。

◎評分原則

當 $n=1$ 時， $a_1 = \frac{3}{2} \left(1 - \frac{1}{3}\right) = \frac{3}{2} \times \frac{2}{3} = 1$ ，此式成立 (1 分)

設 $n=k$ 時成立，即 $a_k = \frac{3}{2} \left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^k\right)$ (1 分)

則 $n=k+1$ 時，

$$A^{k+1} = A^k A = \begin{bmatrix} \left(\frac{1}{3}\right)^k & 0 \\ a_k & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left(\frac{1}{3}\right)^{k+1} & 0 \\ \frac{1}{3} a_k + 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow a_{k+1} = \frac{1}{3} a_k + 1 \quad (1 \text{ 分})$$

$$= \frac{1}{3} \left(\frac{3}{2} \left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^k\right) \right) + 1 = \frac{1}{2} \left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^k\right) + 1$$

$$= \frac{3}{2} - \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{3}\right)^k = \frac{3}{2} - \frac{3}{2} \times \left(\frac{1}{3}\right)^{k+1}$$

$$= \frac{3}{2} \left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{k+1}\right), \quad (2 \text{ 分})$$

此式成立

故由數學歸納法得證 $a_n = \frac{3}{2} \left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n\right)$ 對所有正整數皆成立。 (1 分)

$$17. \frac{3}{2}$$

出處：選修數學甲(上)〈極限與函數〉

目標：數列的極限

解析： $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3}{2} \left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n\right) \right) = \frac{3}{2} (1 - 0) = \frac{3}{2}$ 。

◎評分原則

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3}{2} \left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n\right) \right) = \frac{3}{2} (1 - 0) = \frac{3}{2} \quad (2 \text{ 分})$$