

# 臺北區 111 學年度分科測驗模擬考 數學甲(111-B3)



## 第壹部分：選擇(填)題(占 76 分)

### 一、單選題(占 18 分)

- 若正整數  $a$  同時滿足下列兩個條件：①  $1 < a < 1000$  ②  $a^2 - a$  可以被 1000 整除。則這樣的正整數  $a$  共有幾個？ (1) 2 個 (2) 4 個 (3) 6 個 (4) 8 個 (5) 10 個
- 培養皿中有甲、乙兩種細菌，已知甲細菌的數量每 8 小時會增為原來的 4 倍，乙細菌的數量每 2 小時會增為原來的 2 倍。若一開始甲細菌的數量是乙細菌數量的  $K$  倍，過了 120 小時後，兩細菌的數量相等，則  $K$  最接近下列哪一個數？  
(1)  $10^6$  (2)  $10^7$  (3)  $10^8$  (4)  $10^9$  (5)  $10^{10}$

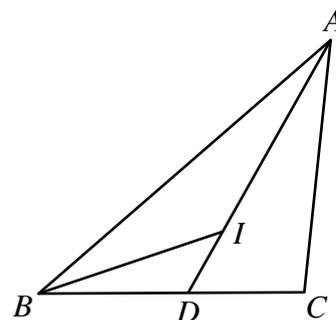
- 如右圖， $\triangle ABC$  中， $\overline{AD}$  為  $\angle BAC$  的角平分線， $I$  為內心，且

$\overline{AB} = 15$ ， $\overline{AC} = 10$ ， $\overline{BC} = 10$ 。現過  $I$  點作一直線，分別交

$\overline{AB}$ 、 $\overline{AC}$  於  $R$ 、 $S$  兩點，若  $\overrightarrow{AR} = t \overrightarrow{AB}$ ， $\overrightarrow{AS} = \frac{3t}{2} \overrightarrow{AC}$ ，

則實數  $t$  的值為下列哪一個選項？

- (1)  $\frac{2}{5}$  (2)  $\frac{3}{5}$  (3)  $\frac{4}{7}$  (4)  $\frac{5}{7}$  (5)  $\frac{9}{14}$



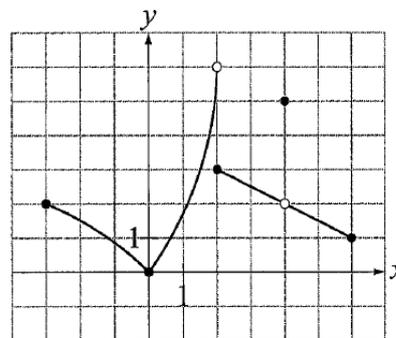
### 二、多選題(占 40 分)

- 設  $f(x)$  為三次實係數多項式， $f(1) = f(-3) = 0$ ， $f(2) = 10$ ， $f(3) = 48$ ，請選出正確的選項。

- (1)  $f(x)$  的首項係數為 3 (2)  $f(x)$  除以  $f(x)$  的餘式為 18 (3)  $f(x)$  的圖形和  $x$  軸相切  
(4)  $f(x) = 20$  有三實根 (5)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{(x-1)^2} = 8$

- 若函數  $y = f(x)$  的圖形如右，已知每個方格邊長為 1 單位，請選出正確的選項。

- (1)  $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 3$  (2)  $\lim_{x \rightarrow 4} f(x)$  不存在  
(3)  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$  (4)  $f'(-1) < 0$  (5)  $f'(0) = 0$



- 已知二階方陣  $A = \begin{bmatrix} a & b \\ 1 & a \end{bmatrix}$ ，其中  $a > 0, b > 0$ ，且  $A^3 = A$ ，請選出正確的選項。

- (1)  $A^{-1}$  存在 (2)  $\det(A) = 0$  (3)  $A^2 = I$  (4)  $a = \frac{1}{2}$  (5)  $b = \frac{1}{4}$

- 以下關於三角形的敘述，請選出正確的選項。

- (1) 有  $\triangle ABC$  能同時滿足下列條件： $\tan A = -1, \tan B = \frac{1}{2}, \tan C = \frac{1}{3}$   
(2) 有  $\triangle ABC$  能同時滿足下列條件： $\cos A = -\frac{1}{2}, \cos B = \frac{1}{3}$   
(3) 僅有一個  $\triangle ABC$  會滿足下列條件： $\sin A = \frac{12}{13}, \cos B = \frac{4}{5}, \overline{AC} = 10$

(4) 僅有一個 $\triangle ABC$  會滿足下列條件： $\sin A = \frac{5}{13}, \cos B = \frac{4}{5}, \overline{AC} = 10$

(5) 僅有一個 $\triangle ABC$  會滿足下列條件： $\sin A - \sqrt{3} \cos A = 1, \sin B = \frac{1}{3}, \overline{AC} = 10$

8. 甲、乙、丙三人依照下列規則進行羽球比賽：其中兩人比賽，另一人當裁判，每局比賽結束時，輸的一方在下一局當裁判，比賽按這種規則一直進行到其中一人連勝兩局或三人合計打滿 5 局結束。三人實力相當，每局每人勝負的機率皆為  $\frac{1}{2}$ ，各局勝負皆互相獨立。設

$A_k$ 、 $B_k$ 、 $C_k$  分別表示甲、乙、丙三人在第  $k$  局獲勝的事件，例如  $A_1 \cap A_2$  表示甲在第 1 局和第 2 局皆獲勝， $P(A_1 \cap A_2)$  表示甲在第 1 局和第 2 局皆獲勝的機率。假設第一局由丙先當裁判，請選出正確的選項。

(1)  $P(A_1 \cap C_2 \cap A_3) = \frac{1}{8}$  (2) 若丙連勝兩局，必定是發生在第 2 局和第 3 局

(3) 若打滿 5 局，第 5 局獲勝者為丙的機率為  $\frac{1}{3}$  (4) 若比賽在第  $X$  局結束，則此隨機變

數  $X$  的期望值  $E(X) = \frac{23}{8}$  (5) 承(4)，變異數  $\text{Var}(X) = \frac{71}{64}$

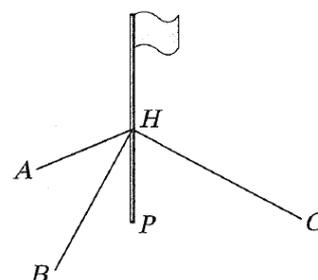
### 三、選填題 (占 18 分)

9. 已知  $\langle a_n \rangle$  為一等差數列，其首項為  $\frac{5}{2}$ ，公差為  $\frac{3}{2}$ ，若數列  $\langle b_n \rangle$  滿足  $b_n = \frac{1}{a_n}$ ，試求

$$\sum_{i=1}^{20} (b_k \times b_{k+1}) = \underline{\hspace{2cm}}。(\text{化為最簡分數})$$

10. 已知圓  $C: (x-a)^2 + (y-a)^2 = 1 (a > 0)$  與直線  $L: y = 2x$  相交於  $A$ 、 $B$  兩點， $M$  為圓  $C$  的圓心。當  $\triangle MAB$  的面積為最大時，實數  $a$  的值為  $\underline{\hspace{2cm}}$ 。(化為最簡根式)

11. 童軍訓練要求以三條童軍繩彼此互相垂直來穩固一垂直地面之旗桿。若已知其繩長  $\overline{HA} = 6$  呎， $\overline{HB} = 6$  呎， $\overline{HC} = 12$  呎，試求旗桿結繩處  $H$  距離地面之高度  $\overline{HP}$  為  $\underline{\hspace{2cm}}$  呎。



第貳部分：混合題或非選擇題(占 24 分)

12-14 題為題組

設拋物線  $y = ax^2 + bx + c$  ( $a \neq 0, a, b, c$  為實數) 與  $x$  軸交於相異兩點  $(\alpha, 0)$ 、 $(\beta, 0)$  且  $\alpha < \beta$ ，試回答下列問題：

12. 若  $y = ax^2 + bx + c = a(x - \alpha)(x - \beta)$ ，試以  $a$ 、 $\alpha$ 、 $\beta$  表示  $b$  與  $c$ 。(非選擇題，2 分)

13. 試證明此拋物線與  $x$  軸所圍成的區域面積  $S = \frac{|a|}{6}(\beta - \alpha)^3$ 。(非選擇題，6 分)

14. 承第 13. 題，試求拋物線  $y = -x^2 + 4x - 2$  與  $x$  軸所圍成的區域面積。(非選擇題，4 分)

15-17 題為題組

設  $A$ 、 $B$ 、 $C$  為複數平面上相異三點，分別代表複數  $z_1 = 2(\cos \alpha + i \sin \alpha)$ 、 $z_2 = 2(\cos \beta + i \sin \beta)$ 、 $z_3 = 2(\cos \gamma + i \sin \gamma)$ ，其中  $0 \leq \alpha, \beta, \gamma < 2\pi$ 。已知  $\triangle ABC$  為正三角形，試回答下列問題：

15. 請選出正確的選項。(多選題，4 分)

- (1)  $z_1 + z_2 + z_3 = 0$    (2)  $\alpha + \beta + \gamma = \pi$    (3)  $|z_1 - z_2| = 2\sqrt{3}$    (4)  $|z_1 + z_2| = |z_1|$   
(5)  $\frac{z_2}{z_1}$  所有可能值的和為  $-1$

16. 試證明： $z_2 \cdot z_3 = z_1^2$ 。(非選擇題，4 分)

17.  $|3z_1 + 2z_2 - z_3|$  之值為\_\_\_\_\_。(化為最簡根式)(選填題，4 分)

**RA6111 臺北區 111 學年度分科測驗模擬考 數學甲(111-B3)**

**參考答案**

選擇題：1.(1) 2.(4) 3.(3) 4.(2)(3)(5) 5.(3)(4) 6.(2)(4)(5) 7.(1)(4)(5) 8.(2)(4)(5)

選填題：9.  $\frac{16}{65}$  10.  $\frac{\sqrt{10}}{2}$  11. 4

混合題或非選擇題：12.  $b = -a(\alpha + \beta), c = a\alpha\beta$  13. 略 14.  $\frac{8\sqrt{2}}{3}$

15. (1)(3)(4)(5) 16. 略 17.  $2\sqrt{13}$