數學甲考科詳解

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.
(1)	(4)	(3)	(2)(3)(5)	(3)(4)	(2)(4)(5)	(1)(4)(5)
8.						
(2)(4)(5)						

第壹部分、選擇（填）題

一、單選題

1. (1)

出處：第一冊〈數與式〉

目標：利用乘法公式解決因數與倍數的問題

解析：$\because a^2-a=a(a-1)$ 且 a 與 $a-1$ 互質

$\therefore a$ 與 $a-1$ 必然分別為 125 與 8 的倍數

考慮 125 ± 1、375 ± 1、625 ± 1、875 ± 1

可知只有 375×376 與 624×625 這 2 組而已

$\therefore a=376$，625，故選(1)。

2. (4)

出處：第一冊〈指數、對數〉

目標：指對數的應用

解析：設一開始甲細菌的數量為 n_A，乙細菌的數量為 n_B

$n_A\times4^{\frac{120}{8}}=n_B\times2^{\frac{120}{2}}\Rightarrow n_A\times4^{15}=n_B\times2^{60}$

$\Rightarrow K=\dfrac{n_A}{n_B}=2^{30}=(10^{\log2})^{30}\approx(10^{0.3010})^{30}=10^{9.03}\approx10^9$

$(\because 2=10^{\log2}\approx10^{0.3010})$

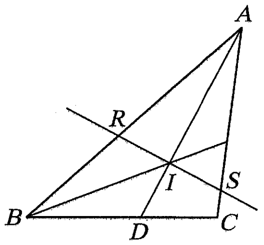
故選(4)。

3. (3)

出處：第三冊〈平面向量〉

目標：向量的分點公式

解析：



$\because \overline{AD}$ 平分 $\angle BAC$

$\therefore \overline{BD}:\overline{DC}=\overline{AB}:\overline{AC}=15:10=3:2$

$\Rightarrow \overline{BD}=10\times\dfrac{3}{3+2}=6$，$\overline{DC}=10-6=4$

$\because \overline{BI}$ 平分 $\angle ABD$

$\therefore \overline{AI}:\overline{ID}=\overline{BA}:\overline{BD}=15:6=5:2\Rightarrow\overline{AI}=\dfrac{5}{7}\overline{AD}$

$\because \overline{BD}:\overline{DC}=3:2$ 且 $\overrightarrow{AR}=t\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AS}=\dfrac{3t}{2}\overrightarrow{AC}$

$$\therefore \overrightarrow{AI}=\frac{5}{7}\overrightarrow{AD}=\frac{5}{7}\left(\frac{2}{3+2}\overrightarrow{AB}+\frac{3}{3+2}\overrightarrow{AC}\right)$$

$$=\frac{2}{7}\overrightarrow{AB}+\frac{3}{7}\overrightarrow{AC}=\frac{2}{7}\times\frac{1}{t}\overrightarrow{AR}+\frac{3}{7}\times\frac{2}{3t}\overrightarrow{AS}$$

$$=\frac{2}{7t}\overrightarrow{AR}+\frac{2}{7t}\overrightarrow{AS}$$

$\because R$，I，S 三點共線　$\therefore \dfrac{2}{7t}+\dfrac{2}{7t}=1\Rightarrow t=\dfrac{4}{7}$

故選(3)。

二、多選題

4. (2)(3)(5)

出處：第一冊〈多項式函數〉、選修數學甲(上)〈極限與函數〉、選修數學甲(上)〈微分〉

目標：餘式定理、因式定理、多項式函數圖形、極限、極值的判斷

解析：(1)╳：因為 $f(1)=f(-3)=0$

則 $f(x)$ 有 $x-1$、$x+3$ 的因式

假設 $f(x)=(x-1)(x+3)(ax+b)$

$\begin{cases}f(2)=1\times5\times(2a+b)=10\\ f(3)=2\times6\times(3a+b)=48\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=2\\ b=-2\end{cases}$

所以 $f(x)=(x-1)(x+3)(2x-2)$

$f(x)$ 的首項係數為 2

(2)○：$f(x)$ 除以 $x+2$ 的餘式為

$f(-2)=(-3)\times1\times(-6)=18$

(3)○：$f(x)=2(x-1)^2(x+3)$，$f(1)=0$ 且 $f'(1)=0$

所以 $f(x)$ 的圖形和 x 軸相切

(4)╳：因為 $f'(x)=(x-1)(6x+10)$

x		$-\frac{5}{3}$		1	
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗		↘		↗

在 $x=1$ 時，有最小值 $f(1)=0$

在 $x=-\dfrac{5}{3}$ 時，有最大值 $f\left(-\dfrac{5}{3}\right)=\dfrac{512}{27}<20$

$y=f(x)$ 的圖形和直線 $y=20$ 只有一個交點

所以 $f(x)=20$ 只有一實根

(5)○：$\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{(x-1)^2}=\lim_{x\to1}\frac{2(x-1)^2(x+3)}{(x-1)^2}=8$

故選(2)(3)(5)。

5. (3)(4)

出處：選修數學甲(上)〈極限與函數〉、選修數學甲(上)〈微分〉

目標：函數的極限與連續函數、微分定義應用

解析：觀察題圖可知

(1)╳：$\displaystyle\lim_{x\to2^-}f(x)=6$

(2)╳：$\displaystyle\lim_{x\to4}f(x)=2$

(3)○：$f(x)$ 在 $x=0$ 為連續函數，

且 $f(x)$ 通過 $(0,0)$，所以 $\displaystyle\lim_{x\to0}f(x)=0$

(4)○：$f(x)$ 在 $x=-1$ 處的切線斜率為負，

所以 $f'(-1)<0$

(5)╳：$f'(0)$ 不存在

故選(3)(4)。

6. (2)(4)(5)

出處：第四冊〈矩陣〉

目標：熟悉乘法反方陣的定義及矩陣相關運算

解析：(1)╳：若 A^{-1} 存在，則 $A^3\times A^{-1}=A\times A^{-1}\Rightarrow A^2=I$

$\Rightarrow\begin{bmatrix}a^2+b & 2ab\\ 2a & a^2+b\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$

$\Rightarrow a=0$，不合，故 A^{-1} 不存在

(2)○：$\because A^{-1}$ 不存在　$\therefore \det(A)=0$

(3) ╳：$\because \det(A)=0 \Rightarrow a^2=b$

$\Rightarrow A=\begin{bmatrix} a & a^2 \\ 1 & a \end{bmatrix}$

$\Rightarrow A^2=\begin{bmatrix} a & a^2 \\ 1 & a \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & a^2 \\ 1 & a \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2a^2 & 2a^3 \\ 2a & 2a^2 \end{bmatrix}$

$=2a\begin{bmatrix} a & a^2 \\ 1 & a \end{bmatrix}=2aA\neq I$

(4) ◯：$A^3=A\times A^2=A(2aA)=2aA^2=4a^2A$

$\because A^3=A \quad \therefore 4a^2=1 \Rightarrow a=\frac{1}{2}$ 或 $-\frac{1}{2}$(不合)

(5) ◯：$b=a^2=\frac{1}{4}$

故選(2)(4)(5)。

7. (1)(4)(5)

出處：第二冊〈三角比〉、第三冊〈三角函數〉

目標：廣義角三角比、三角函數的和角公式與差角公式、正餘弦函數的疊合

解析：(1) ◯：$\tan A=-1 \Rightarrow \angle A=135^\circ$

又 $\tan(B+C)=\dfrac{\tan B+\tan C}{1-\tan B\tan C}=\dfrac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}}=1$

$\Rightarrow \angle B+\angle C=45^\circ$

得 $\angle A+\angle B+\angle C=180^\circ$，

這樣的 $\triangle ABC$ 是存在的

(2) ╳：$\cos A=-\frac{1}{2} \Rightarrow \angle A=120^\circ$

又 $0<\cos B=\frac{1}{3}<\frac{1}{2}=\cos 60^\circ$

$\Rightarrow 60^\circ<\angle B<90^\circ$

則 $\angle A+\angle B>180^\circ$，這樣的三角形不存在

(3) ╳：$\because \sin A=\frac{12}{13} \quad \therefore \cos A=\pm\frac{5}{13}$

① $\cos A=\frac{5}{13}$，又 $\cos B=\frac{4}{5}$

$\Rightarrow \angle A$，$\angle B$ 皆為銳角

$\Rightarrow 0^\circ<\angle A+\angle B<180^\circ$

② $\cos A=-\frac{5}{13}$，又 $\cos B=\frac{4}{5}$

$\Rightarrow 90^\circ<\angle A<180^\circ$

又 $\sin(A+B)=\sin A\cos B+\cos A\sin B$

$=\frac{12}{13}\times\frac{4}{5}+\left(-\frac{5}{13}\right)\times\frac{3}{5}=\frac{33}{65}>0$

$\Rightarrow 90^\circ<\angle A+\angle B<180^\circ$

這表示有兩組角度 $\angle A$，$\angle B$，

$0^\circ<\angle A+\angle B<180^\circ$，滿足 $\angle A$，$\angle B$ 的條件

再由 $\overline{AC}=10$，

知有兩個 $\triangle ABC$ 滿足全部的條件

故不能確定 $\triangle ABC$ 唯一的形狀與大小

(4) ◯：$\because \sin A=\frac{5}{13} \quad \therefore \cos A=\pm\frac{12}{13}$

① $\cos A=\frac{12}{13}$，又 $\cos B=\frac{4}{5}$

$\Rightarrow \angle A$，$\angle B$ 皆為銳角

$\Rightarrow 0^\circ<\angle A+\angle B<180^\circ$

② $\cos A=-\frac{12}{13}$，又 $\cos B=\frac{4}{5}$

$\Rightarrow \sin(A+B)=\sin A\cos B+\cos A\sin B$

$=\frac{5}{13}\times\frac{4}{5}+\left(-\frac{12}{13}\right)\times\frac{3}{5}=-\frac{16}{65}<0$

$\Rightarrow \angle A+\angle B>180^\circ$ 不合

故恰有一組角度 $\angle A$，$\angle B$，

$0^\circ<\angle A+\angle B<180^\circ$，滿足 $\angle A$，$\angle B$ 的條件

由 $\overline{AC}=10$，AAS 全等性質，

能確定 $\triangle ABC$ 唯一的形狀與大小

(5) ◯：$\sin A-\sqrt{3}\cos A=1$

$\Rightarrow 2\left(\sin A\times\frac{1}{2}-\cos A\times\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=1$

$\Rightarrow \sin A\cos 60^\circ-\cos A\sin 60^\circ=\frac{1}{2}$

$\Rightarrow \sin(A-60^\circ)=\frac{1}{2} \Rightarrow \angle A-60^\circ=30^\circ$ 或 150°

$\Rightarrow \angle A=90^\circ$ 或 210° (不合)

$\because \sin B=\frac{1}{3}<\frac{1}{2}=\sin 30^\circ$

$\therefore 0<\angle B<30^\circ$ 或 $150^\circ<\angle B<180^\circ$ (與 $\angle A$ 相加超過 180°，故不合)

恰有一組角度 $\angle A$，$\angle B$，$0^\circ<\angle A+\angle B<180^\circ$，滿足 $\angle A$，$\angle B$ 的條件

由 $\overline{AC}=10$，AAS 全等性質，能確定 $\triangle ABC$ 唯一的形狀與大小，故選(1)(4)(5)。

8. (2)(4)(5)

出處：第四冊〈機率〉、選修數學甲(下)〈機率統計〉

目標：能理解題意，並求條件機率、隨機變數之期望值和變異數

解析：列出所有可能判斷獲勝之情形，如下表

設隨機變數 X 為比賽開始到結束已打的局數

X	獲勝情形	機率
$X=2$ (打滿 2 局)	$A_1\cap A_2$ $B_1\cap B_2$	$\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2$ $=\frac{1}{2}$
$X=3$ (打滿 3 局)	$A_1\cap C_2\cap C_3$ $B_1\cap C_2\cap C_3$	$\left(\frac{1}{2}\right)^3+\left(\frac{1}{2}\right)^3$ $=\frac{1}{4}$
$X=4$ (打滿 4 局)	$A_1\cap C_2\cap B_3\cap B_4$ $B_1\cap C_2\cap A_3\cap A_4$	$\left(\frac{1}{2}\right)^4+\left(\frac{1}{2}\right)^4$ $=\frac{1}{8}$
$X=5$ (打滿 5 局)	$A_1\cap C_2\cap B_3\cap A_4\cap A_5$ $A_1\cap C_2\cap B_3\cap A_4\cap C_5$ $B_1\cap C_2\cap A_3\cap B_4\cap B_5$ $B_1\cap C_2\cap A_3\cap B_4\cap C_5$	$\left(\frac{1}{2}\right)^5+\left(\frac{1}{2}\right)^5$ $+\left(\frac{1}{2}\right)^5+\left(\frac{1}{2}\right)^5$ $=\frac{1}{8}$

(1) ╳：第 2 局丙勝甲，甲不可能在第 3 局出現並獲勝

$\therefore P(A_1\cap C_2\cap A_3)=0$

(2) ○：如上表所示，敘述正確

(3) ╳：如上表所示，所求條件機率為

$$\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^5+\left(\frac{1}{2}\right)^5}{\left(\frac{1}{2}\right)^5+\left(\frac{1}{2}\right)^5+\left(\frac{1}{2}\right)^5+\left(\frac{1}{2}\right)^5}=\frac{1}{2}$$

(4) ○：$E(X)=2\times\frac{1}{2}+3\times\frac{1}{4}+4\times\frac{1}{8}+5\times\frac{1}{8}=\frac{23}{8}$

(5) ○：$E(X^2)=2^2\times\frac{1}{2}+3^2\times\frac{1}{4}+4^2\times\frac{1}{8}+5^2\times\frac{1}{8}=\frac{75}{8}$

$$\mathrm{Var}(X)=E(X^2)-(E(X))^2=\frac{75}{8}-\left(\frac{23}{8}\right)^2=\frac{71}{64}$$

故選(2)(4)(5)。

三、選填題

9. $\frac{16}{65}$

出處：第二冊〈數列與級數〉、選修數學甲(上)〈極限與函數〉

目標：能察覺數列規律並以一般項或遞迴方式表示

解析：$a_k=1+\frac{3}{2}k=\frac{3k+2}{2}$，$a_{k+1}=\frac{3k+5}{2}$

$$\Rightarrow b_k\times b_{k+1}=\frac{1}{a_k\times a_{k+1}}=\frac{4}{(3k+2)(3k+5)}$$

$$=\frac{4}{3}\left(\frac{1}{3k+2}-\frac{1}{3k+5}\right)$$

故 $\sum_{k=1}^{20}(b_k\times b_{k+1})=\frac{4}{3}\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{8}+\frac{1}{8}-\frac{1}{11}+\cdots\cdots+\frac{1}{62}-\frac{1}{65}\right)$

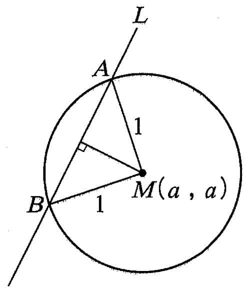
$$=\frac{16}{65}$$。

10. $\frac{\sqrt{10}}{2}$

出處：第一冊〈直線與圓〉、第二冊〈三角比〉

目標：圓與直線的關係、圓的弦長

解析：



〈解法一〉

因為 $d(M,L)=\frac{a}{\sqrt{5}}$，$\overline{AB}=2\sqrt{1-\left(\frac{a}{\sqrt{5}}\right)^2}=2\sqrt{\frac{5-a^2}{5}}$

$\triangle MAB$ 面積為 $\frac{1}{2}\times\frac{a}{\sqrt{5}}\times2\sqrt{\frac{5-a^2}{5}}=\frac{\sqrt{5a^2-a^4}}{5}$

$$=\frac{1}{5}\sqrt{-\left(a^4-5a^2+\frac{25}{4}\right)+\frac{25}{4}}$$

$$=\frac{1}{5}\sqrt{-\left(a^2-\frac{5}{2}\right)^2+\frac{25}{4}}$$

當 $a^2=\frac{5}{2}$，即 $a=\sqrt{\frac{5}{2}}=\frac{\sqrt{10}}{2}$ 時，

$\triangle MAB$ 面積有最大值 $\frac{1}{2}$。

〈解法二〉

假設 $\angle AMB=\theta$

因為 $\triangle MAB$ 的面積為 $\frac{1}{2}\times1\times1\times\sin\theta$

當 $\theta=90^\circ$ 時，$\sin\theta$ 有最大值 1

此時 $\triangle MAB$ 為一等腰直角三角形

$d(M,L)=\frac{a}{\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，則 $a=\frac{\sqrt{10}}{2}$。

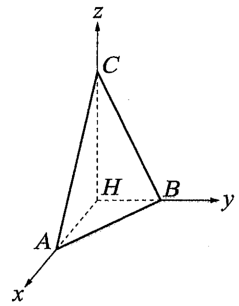
11. 4

出處：第四冊〈空間中的平面與直線〉

目標：熟悉並應用空間中的平面方程式與點到平面的距離公式

解析：建立一空間坐標：

$H(0,0,0)$，$A(6,0,0)$，$B(0,6,0)$，$C(0,0,12)$



則 $\triangle ABC$ 所在之平面方程式為 E：$\frac{x}{6}+\frac{y}{6}+\frac{z}{12}=1$

故 $\overline{HP}=d(H,\text{平面 }E)$

$$=\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{36}+\frac{1}{36}+\frac{1}{144}}}=4$$。

第貳部分、混合題或非選擇題

12. $b=-a(\alpha+\beta)$，$c=a\alpha\beta$

出處：選修數學甲(下)〈複數與多項式方程式〉

目標：一元二次方程式及根與係數的關係

解析：〈解法一〉

$\because ax^2+bx+c=a(x-\alpha)(x-\beta)$

$=ax^2-a(\alpha+\beta)x+a\alpha\beta$

$\therefore b=-a(\alpha+\beta)$，$c=a\alpha\beta$。

〈解法二〉

由根與係數關係可得

$\alpha+\beta=-\frac{b}{a}$，$\alpha\beta=\frac{c}{a}$

$\therefore b=-a(\alpha+\beta)$，$c=a\alpha\beta$。

◎評分原則

〈解法一〉

$\because ax^2+bx+c=a(x-\alpha)(x-\beta)$ (1 分)

$=ax^2-a(\alpha+\beta)x+a\alpha\beta$

$\therefore b=-a(\alpha+\beta)$，$c=a\alpha\beta$。 ($b$，$c$ 全對，1 分)

〈解法二〉

由根與係數關係可得

$\alpha+\beta=-\frac{b}{a}$，$\alpha\beta=\frac{c}{a}$ (1 分)

$\therefore b=-a(\alpha+\beta)$，$c=a\alpha\beta$。 ($b$，$c$ 全對，1 分)

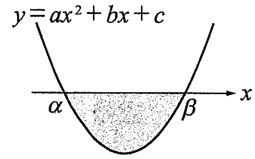
13. 略

出處：選修數學甲(上)〈積分〉

目標：積分的應用

解析：〈解法一〉

若 $a>0$，$y=ax^2+bx+c$ 略圖如下



$$S=-\int_\alpha^\beta(ax^2+bx+c)dx=-\left(\frac{a}{3}x^3+\frac{b}{2}x^2+cx\right)\Bigg|_\alpha^\beta$$

$$=-\left[\frac{a}{3}(\beta^3-\alpha^3)+\frac{b}{2}(\beta^2-\alpha^2)+c(\beta-\alpha)\right]$$

$$=-\left[\frac{a}{3}(\beta^3-\alpha^3)-\frac{a}{2}(\alpha+\beta)(\beta^2-\alpha^2)+a\alpha\beta(\beta-\alpha)\right]$$

$$=-\frac{a}{6}(\alpha^3-3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2-\beta^3)$$

$$=-\frac{a}{6}(\alpha-\beta)^3=\frac{a}{6}(\beta-\alpha)^3$$

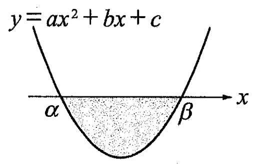
同理可知，若 $a<0$，

則 $S=\int_\alpha^\beta(ax^2+bx+c)dx=\dfrac{-a}{6}(\beta-\alpha)^3$

所以對任意實數 $a\neq0$，$S=\dfrac{|a|}{6}(\beta-\alpha)^3$。

〈解法二〉

①若 $a>0$，$y=ax^2+bx+c$ 略圖如下



$y=ax^2+bx+c=a(x-\alpha)(x-\beta)$

$$S=-\int_\alpha^\beta(ax^2+bx+c)dx$$

$$=-\int_\alpha^\beta a(x-\alpha)(x-\beta)dx$$

$$=-a\int_\alpha^\beta[x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta]dx$$

$$=-a\left(\frac{x^3}{3}-\frac{\alpha+\beta}{2}x^2+\alpha\beta x\right)\Bigg|_\alpha^\beta$$

$$=-a\left[\frac{1}{3}(\beta^3-\alpha^3)-\frac{\alpha+\beta}{2}(\beta^2-\alpha^2)+\alpha\beta(\beta-\alpha)\right]$$

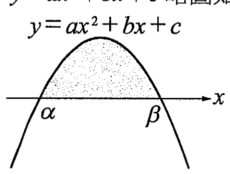
$$=-a\left[\frac{2}{6}(\beta-\alpha)(\beta^2+\alpha\beta+\alpha^2)\right.$$

$$\left.-\frac{3}{6}(\alpha+\beta)(\beta-\alpha)(\beta+\alpha)+\frac{6}{6}\alpha\beta(\beta-\alpha)\right]$$

$$=-\frac{a}{6}(\beta-\alpha)(2\beta^2+2\alpha\beta+2\alpha^2-3\alpha^2-6\alpha\beta-3\beta^2+6\alpha\beta)$$

$$=-\frac{a}{6}(\beta-\alpha)[-(\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2)]=\frac{a}{6}(\beta-\alpha)^3$$

②若 $a<0$，$y=ax^2+bx+c$ 略圖如下



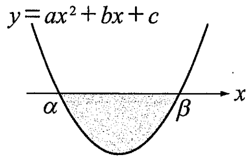
同理，$S=a\int_\alpha^\beta(x-\alpha)(x-\beta)dx=\dfrac{-a}{6}(\beta-\alpha)^3$

由①、②得 $S=\dfrac{|a|}{6}(\beta-\alpha)^3$。

◎評分原則

〈解法一〉

若 $a>0$，$y=ax^2+bx+c$ 略圖如下



$S=\int_\alpha^\beta(ax^2+bx+c)dx$　(1 分)

$=-\left(\dfrac{a}{3}x^3+\dfrac{b}{2}x^2+cx\right)\Bigg|_\alpha^\beta$　(1 分)

$$=-\left[\frac{a}{3}(\beta^3-\alpha^3)+\frac{b}{2}(\beta^2-\alpha^2)+c(\beta-\alpha)\right]$$

$$=-\left[\frac{a}{3}(\beta^3-\alpha^3)-\frac{a}{2}(\alpha+\beta)(\beta^2-\alpha^2)+a\alpha\beta(\beta-\alpha)\right]$$

$$=-\frac{a}{6}(\alpha^3-3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2-\beta^3)$$

$=-\dfrac{a}{6}(\alpha-\beta)^3=\dfrac{a}{6}(\beta-\alpha)^3$　(2 分)

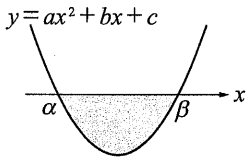
同理可知，若 $a<0$，

則 $S=\int_\alpha^\beta(ax^2+bx+c)dx=\dfrac{-a}{6}(\beta-\alpha)^3$　(1 分)

所以對任意實數 $a\neq0$，$S=\dfrac{|a|}{6}(\beta-\alpha)^3$。　(1 分)

〈解法二〉

①若 $a>0$，$y=ax^2+bx+c$ 略圖如下



$y=ax^2+bx+c=a(x-\alpha)(x-\beta)$

$$S=-\int_\alpha^\beta(ax^2+bx+c)dx$$

$$=-\int_\alpha^\beta a(x-\alpha)(x-\beta)dx$$

$$=-a\int_\alpha^\beta[x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta]dx$$

$$=-a\left(\frac{x^3}{3}-\frac{\alpha+\beta}{2}x^2+\alpha\beta x\right)\Bigg|_\alpha^\beta$$

$$=-a\left[\frac{1}{3}(\beta^3-\alpha^3)-\frac{\alpha+\beta}{2}(\beta^2-\alpha^2)+\alpha\beta(\beta-\alpha)\right]$$

$$=-a\left[\frac{2}{6}(\beta-\alpha)(\beta^2+\alpha\beta+\alpha^2)\right.$$

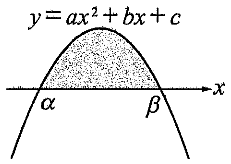
$$\left.-\frac{3}{6}(\alpha+\beta)(\beta-\alpha)(\beta+\alpha)+\frac{6}{6}\alpha\beta(\beta-\alpha)\right]$$

$$=-\frac{a}{6}(\beta-\alpha)(2\beta^2+2\alpha\beta+2\alpha^2-3\alpha^2-6\alpha\beta-3\beta^2+6\alpha\beta)$$

$$=-\frac{a}{6}(\beta-\alpha)[-(\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2)]$$

$=\dfrac{a}{6}(\beta-\alpha)^3$　(4 分)

②若 $a<0$，$y=ax^2+bx+c$ 略圖如下



同理，$S=a\int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)(x-\beta)dx=\dfrac{-a}{6}(\beta-\alpha)^3$　(1 分)

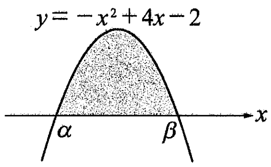
由①、②得 $S=\dfrac{|a|}{6}(\beta-\alpha)^3$。　(1 分)

14. $\dfrac{8\sqrt{2}}{3}$

出處：選修數學甲(上)〈積分〉

目標：積分的應用

解析：



$y=-x^2+4x-2$

$-x^2+4x-2=0$

$\Rightarrow x^2-4x+2=0$

$\Rightarrow x=\dfrac{4\pm\sqrt{16-8}}{2}=\dfrac{4\pm\sqrt{8}}{2}=\dfrac{4\pm 2\sqrt{2}}{2}=2\pm\sqrt{2}$

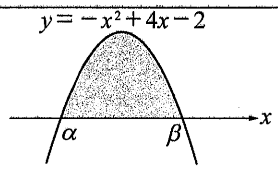
$\beta=2+\sqrt{2}$，$\alpha=2-\sqrt{2}$

面積 $S=\dfrac{|a|}{6}(\beta-\alpha)^3=\dfrac{1}{6}(2+\sqrt{2}-2+\sqrt{2})^3$

$=\dfrac{1}{6}(2\sqrt{2})^3$

$=\dfrac{1}{6}\times 8\times 2\sqrt{2}=\dfrac{8\sqrt{2}}{3}$。

◎評分原則



$y=-x^2+4x-2$

$-x^2+4x-2=0$

$\Rightarrow x^2-4x+2=0$

$\Rightarrow x=\dfrac{4\pm\sqrt{16-8}}{2}=\dfrac{4\pm\sqrt{8}}{2}=\dfrac{4\pm 2\sqrt{2}}{2}=2\pm\sqrt{2}$

$\beta=2+\sqrt{2}$　(1 分)

$\alpha=2-\sqrt{2}$　(1 分)

面積 $S=\dfrac{|a|}{6}(\beta-\alpha)^3=\dfrac{1}{6}(2+\sqrt{2}-2+\sqrt{2})^3$

$=\dfrac{1}{6}(2\sqrt{2})^3$

$=\dfrac{1}{6}\times 8\times 2\sqrt{2}=\dfrac{8\sqrt{2}}{3}$。　(2 分)

15. (1)(3)(4)(5)

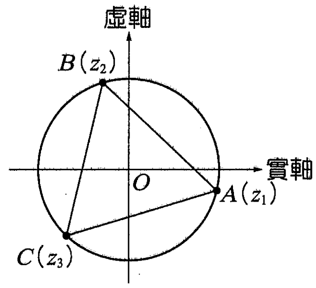
出處：選修數學甲(下)〈複數與多項式方程式〉

目標：複數的幾何意涵

解析：(1) ○：因為 $|z_1|=|z_2|=|z_3|=2$，

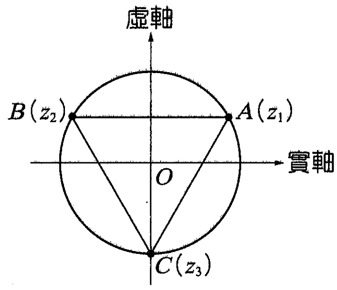
A、B、C 三點在以原點 O 為圓心，半徑為 2 的圓上，又△ABC 為正三角形

所以原點 O 為△ABC 的重心



因此 $z_1+z_2+z_3=0$

(2) ╳：反例：若 A、B、C 三點位置如下



則 $\alpha=\dfrac{\pi}{6}$，$\beta=\dfrac{5\pi}{6}$，$\gamma=\dfrac{3\pi}{2}$ 滿足

$z_1+z_2+z_3=2(\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma)$
$+2i(\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma)=0$

但 $\alpha+\beta+\gamma=\dfrac{5\pi}{2}\neq\pi$

(3) ○：$|z_1-z_2|$ 表示 A、B 兩點之間的距離

根據餘弦定理

$\overline{AB}^2=\overline{OA}^2+\overline{OB}^2-2\,\overline{OA}\times\overline{OB}\cos\angle AOB$

$=2^2+2^2-2\times 2\times 2\cos\dfrac{2\pi}{3}=12$

故 $|z_1-z_2|=\overline{AB}=\sqrt{12}=2\sqrt{3}$

(4) ○：由 $z_1+z_2+z_3=0$ 可知

$|z_1+z_2|=|-z_3|=|z_3|=|z_1|$

(5) ○：A、B、C 三點位置有兩種可能：

① $B(z_2)$ 由 $A(z_1)$ 以原點為中心順時針旋轉 $\dfrac{2\pi}{3}$ 可得

即 $z_2=z_1\left[\cos\left(-\dfrac{2\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\dfrac{2\pi}{3}\right)\right]$

此時，$\dfrac{z_2}{z_1}=\cos\left(-\dfrac{2\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\dfrac{2\pi}{3}\right)$

$=-\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$

② $B(z_2)$ 由 $A(z_1)$ 以原點為中心逆時針旋轉 $\frac{2\pi}{3}$

可得

即 $z_2=z_1\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$

此時，$\frac{z_2}{z_1}=\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}$

$=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$

故 $\frac{z_2}{z_1}$ 所有可能值的和為

$\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)+\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)=-1$

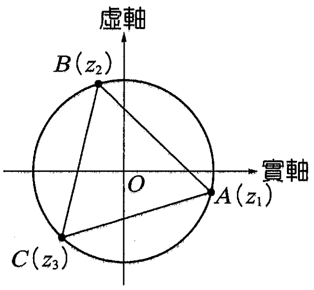
故選(1)(3)(4)(5)。

16. 略

出處：選修數學甲(下)〈複數與多項式方程式〉

目標：複數的幾何意涵

解析：若 A、B、C 三點依序在圓上的相對位置為逆時針方向，則

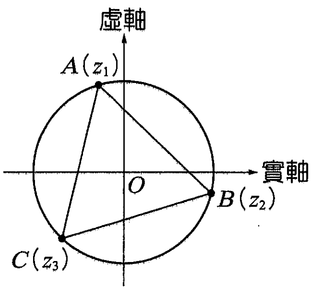


$z_2=z_1\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)\Rightarrow\frac{z_2}{z_1}=\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}$

$z_1=z_3\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)\Rightarrow\frac{z_1}{z_3}=\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}$

故 $\frac{z_2}{z_1}=\frac{z_1}{z_3}$，即 $z_2\cdot z_3=z_1^2$

若 A、B、C 三點依序在圓上的相對位置為順時針方向，則



$z_2=z_1\left[\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right)\right]$

$\Rightarrow\frac{z_2}{z_1}=\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right)$

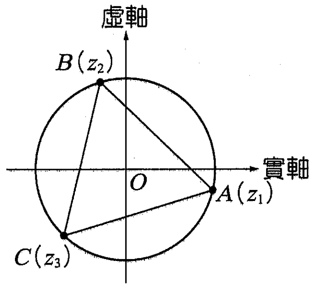
$z_1=z_3\left[\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right)\right]$

$\Rightarrow\frac{z_1}{z_3}=\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right)$

故 $\frac{z_2}{z_1}=\frac{z_1}{z_3}$，即 $z_2\cdot z_3=z_1^2$。

◎評分原則

若 A、B、C 三點依序在圓上的相對位置為逆時針方向，則

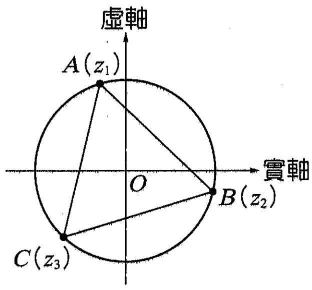


$z_2=z_1\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)\Rightarrow\frac{z_2}{z_1}=\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}$

$z_1=z_3\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)\Rightarrow\frac{z_1}{z_3}=\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}$

故 $\frac{z_2}{z_1}=\frac{z_1}{z_3}$，即 $z_2\cdot z_3=z_1^2$　(2 分)

若 A、B、C 三點依序在圓上的相對位置為順時針方向，則



$z_2=z_1\left[\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right)\right]$

$\Rightarrow\frac{z_2}{z_1}=\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right)$

$z_1=z_3\left[\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right)\right]$

$\Rightarrow\frac{z_1}{z_3}=\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right)$

故 $\frac{z_2}{z_1}=\frac{z_1}{z_3}$，即 $z_2\cdot z_3=z_1^2$。　(2 分)

17. $2\sqrt{13}$

出處：選修數學甲(下)〈複數與多項式方程式〉

目標：複數的幾何意涵

解析：因為 $z_1+z_2+z_3=0$，可得 $z_3=-z_1-z_2$

$|3z_1+2z_2-z_3|=|3z_1+2z_2-(-z_1-z_2)|$

$=|4z_1+3z_2|=|4\overrightarrow{OA}+3\overrightarrow{OB}|$

$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=|\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OB}|\cos\angle AOB$

$=2\times2\times\cos 120^\circ=-2$

$|4\overrightarrow{OA}+3\overrightarrow{OB}|^2=16|\overrightarrow{OA}|^2+24\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}+9|\overrightarrow{OB}|^2$

$=16\times4+24\times(-2)+9\times4=52$

所以 $|3z_1+2z_2-z_3|=\sqrt{52}=2\sqrt{13}$。