

# 全國公私立 111 學年度分科測驗第七次數學甲

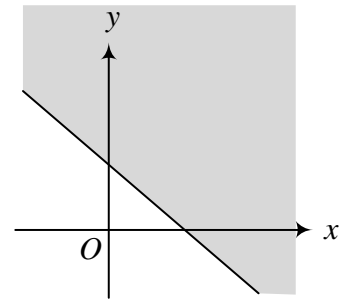


## 第壹部分：選擇(填)題(占 76 分)

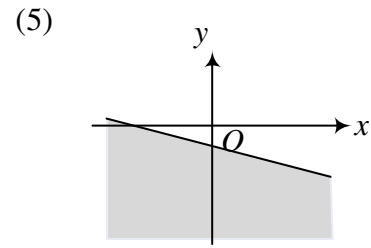
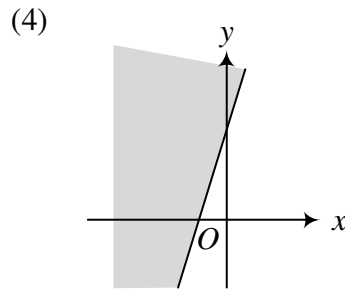
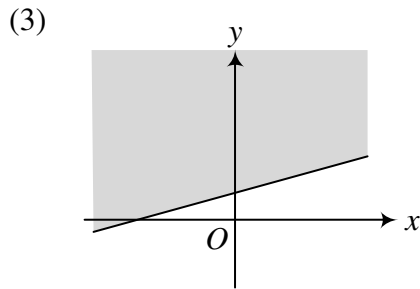
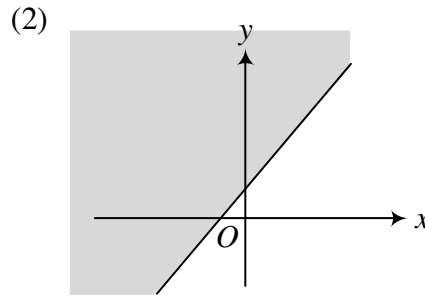
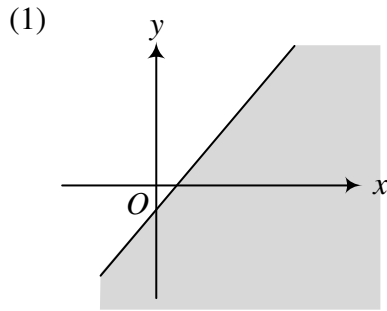
### 一、單選題(占 18 分)

1. 如圖(1)(圖中  $x$  軸與  $y$  軸單位長相同)，塗色區域中的所有點經過

矩陣  $M = \begin{bmatrix} -\frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \end{bmatrix}$  變換後，形成的區域為下列何者？



圖(1)



2. 已知  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x-1} = 5$ ， $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{x-2} = -3$ ，則下列何者正確？

(1)  $f(1) = 0$  (2)  $f(2) = 0$  (3)  $f(x) = 0$  在區間(1, 2)間必有實根

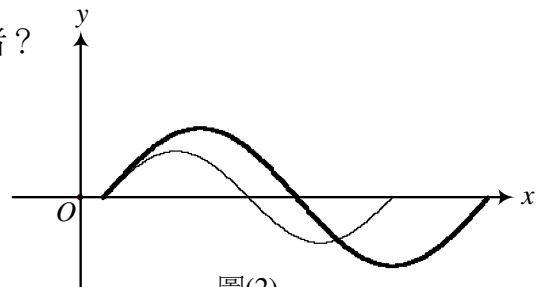
(4)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{(x-1)(x-2)} = -15$  (5)  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} f(x)$

3. 圖(2)為兩個正弦函數的部分圖形(圖中  $x$  軸與  $y$  軸單位長不一定相同)，已知其中一個函數為  $y = \sin(x - \frac{\pi}{6})$ ，則另一個函數最可能為下列何者？

(1)  $y = \frac{2}{3} \sin(\frac{4}{3}x - \frac{2\pi}{9})$  (2)  $y = \frac{2}{3} \sin(\frac{3}{4}x - \frac{\pi}{6})$

(3)  $y = \frac{4}{3} \sin(\frac{3}{2}x - \frac{\pi}{4})$  (4)  $y = \frac{3}{2} \sin(\frac{4}{3}x - \frac{2\pi}{9})$

(5)  $y = \frac{3}{2} \sin(\frac{3}{4}x - \frac{\pi}{8})$



圖(2)

### 二、多選題(占 40 分)

4. 有一抽籤遊戲，共有 10 支籤(每支籤被抽中的機會均等)，其中一支為獎金 100 元，其餘均無獎金，每玩一次須付 50 元，每次抽完均將籤放回，若該次沒中獎則將獎金累積至下次(例如：第一次沒中獎，則第二次獎金為 200 元；若連續兩次沒中獎，則第三次獎金為 300 元)。試選出正確的選項。

(1) 連續玩 25 次，中獎次數的期望值為 2.5 次

(2) 連續玩 25 次，中獎次數的標準差為 2.25 次

- (3) 若從無累積獎金開始，則連續玩 2 次的獎金期望值為 20 元  
 (4) 若從無累積獎金開始，則連續玩 3 次的獎金期望值大於 50 元  
 (5) 若從無累積獎金開始且連續  $n$  次無人中獎，某人於第  $n+1$  次玩此遊戲，已知該次獲利期望值為正，則  $n$  最小為 5
5. 設  $f(x) = 2^{-x^2+2x+1}$ 、 $g(x) = a \sin x + 2 \cos x$  且  $a > 0$ ，已知在區間  $[0, \pi]$  中  $f(x)$  的最大值為  $M$ 、最小值為  $m$ ；在  $[0, \pi]$  中  $g(x)$  的最大值為  $N$ 、最小值  $n$ ，若  $M=N$ 。試選出正確的選項。  
 (1)  $f(0) = m$  (2)  $m < \frac{1}{4}$  (3)  $a = 2\sqrt{3}$  (4)  $g(\frac{\pi}{3}) = N$  (5)  $n = -2$
6.  $i = \sqrt{-1}$ ，設  $z^n = a_n + ib_n$ ，其中  $a_n, b_n$  為實數， $n$  為正整數，已知  $P$  為二階方陣滿足  $\begin{bmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{bmatrix} = P^n \begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \end{bmatrix}$ 。請選出正確的選項。  
 (1) 若  $a_1 + b_1 = 1$ ，則  $P$  為轉移矩陣 (2) 若  $a_1^2 + b_1^2 = 1$ ，則  $P$  為旋轉矩陣  
 (3) 若數列  $\langle a_n \rangle$  為等比數列，則  $z = \bar{z}$  (4) 若數列  $\langle a_n \rangle$  為等比數列，則  $P$  為伸縮矩陣  
 (5) 若數列  $\langle a_n \rangle$  為等比數列，則公比  $= \sqrt{a_1^2 + b_1^2}$
7. 如圖(3)，已知  $ABCDEF$  為正六邊形， $P, Q, R$  分別為  $B, C, F$  在直線  $AP$  上的投影點。請選出正確的選項。  
 (1) 若  $\overline{AP} = 8, \overline{PQ} = 1$ ，則可求  $\overline{AB}$  長 (2)  $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC}$   
 (3) 若  $\overline{AP} = 8, \overline{PQ} = 1$ ，則  $\overrightarrow{AF} \cdot \overrightarrow{AP} = -56$  (4) 若  $\overline{AP} = 8, \overline{AR} = 5$ ，則  $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AP} = 24$   
 (5) 若  $\overline{AP} = 8, \overline{AR} = 5$ ，則  $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AP} = -16$
8. 已知平面  $E: 4y - 3z = 0$  上有一半徑為 5 的圓  $C$ ，若  $C$  投影在  $xy$  平面上的圓形為  $\Gamma$ ，且  $\Gamma$  在  $xy$  平面上的方程式為  $\frac{(x-6)^2}{m} + \frac{(y-6)^2}{n} = 1$ 。請選出正確的選項。  
 (1) 若  $E$  與  $xy$  平面的夾角為  $\theta$ ，則  $\sin \theta = \frac{3}{5}$  (2)  $C$  的圓心坐標為  $(6, 6, 8)$   
 (3)  $m = 25, n = 9$  (4) 若  $C$  上的點  $P$  在  $xy$  平面上的投影點為  $Q$ ，則  $\overline{PQ}$  的最大值為 11  
 (5) 若  $P$  為  $C$  上的任一點， $Q$  為  $\Gamma$  上的任一點，則  $\overline{PQ}$  的最大值大於 13

### 三、選填題 (占 18 分)

9. 已知直線  $L$  與  $y = \log_4 x$  的圖形交於  $A(3, y_1), B(6, y_2)$ ，且  $L$  與  $y = \log_a x$  的圖形交於  $(9, y_3)$ ，若  $\log a = \frac{(\log b)(\log c)}{\log d}$ ，其中  $b, c, d \in N$  且  $b < 10, c < 10$ ，則  $\frac{bc}{d} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。
10. 從 9、12、15、21 中任取三個相異數字，作為三角形的三邊長，在所有可能構成的三角形中，外接圓最大的三角形，其外接圓半徑為  $\underline{\hspace{2cm}}$ 。(化為最簡根式)
11. 已知  $L_1, L_2$  交於原點，直線  $L: \frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-1}{-3}$  與  $L_1, L_2$  分別交於  $P, Q$ ，且  $\overline{PQ} = 4$ ，直線  $M: \frac{x-3}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-11}{-3}$  與  $L_1, L_2$  分別交於  $A, B$ ，則  $\overline{AB} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

第貳部分：混合題或非選擇題(占 24 分)

12-14 題為題組

$i = \sqrt{-1}$ ，設  $f(x)$  為實係數多項式函數，且  $f(1-i) = 4, f(2i) = 24$ ，若  $f(x)$  除以  $(x^2 - 2x + 2)(x^2 + 4)$  的餘式為  $r(x)$ 。試回答下列問題。

12. 請選出正確的選項。(多選題，4 分)

- (1)  $f(1+i) = -4$  (2)  $f(-2i) = r(-2i)$  (3)  $f(x)$  可為二次函數  
(4) 若  $f(x)$  的次數為奇數次，則  $f(x) = 0$  有實數解  
(5) 若  $f(x)$  為四次函數，則  $f(x) = 0$  沒有實數解

13. 求  $r(x)$ 。(非選擇題，4 分)

14. 已知  $y = r(x)$  的圖形與直線  $y = 26x + k$  有三個交點，試求實數  $k$  的範圍？

(非選擇題，4 分)

15-17 題為題組

設  $f(x)$  為實係數三次多項式函數，且首項係數為 1。已知  $f(x)$  的反曲點為  $(0, f(0))$  且  $y = f(x)$  的圖形在對稱點的一次近似為  $y = -13x + k$ 。若  $y = f(x)$  的圖形與  $x$  軸交於  $A(a, 0)$ 、 $B(b, 0)$ 、 $C(c, 0)$ ，且  $\overline{AB} : \overline{BC} = 2:5$ ，試回答下列問題。

15.  $a + b + c =$  \_\_\_\_\_。(選填題，3 分)

16. 若  $a < b < c$ ，求  $k$ 。(非選擇題，4 分)

17. 若  $a < b < c$ ，求  $y = f(x)$  的圖形與  $x$  軸所圍成的封閉區域面積。(非選擇題，5 分)

**RA6112 全國公私立 111 學年度分科測驗第七次數學甲**

**參考答案**

選擇題：1.(4) 2.(5) 3.(4) 4.(1)(4)(5) 5.(2)(3)(4)(5) 6.(2)(3) 7.(1)(3)(5) 8.(2)(3)(5)

選填題：9.3 10.  $14\sqrt{3}$  11.20

混合題或非選擇題：12.(2)(4) 13.  $2x^3 - 6x^2 + 8x$  14.  $-54 < k < 10$

15.0 16. -12 17.  $\frac{407}{4}$