全國公私立高級中學111學年度分科測驗第七次聯合模擬考試

數學甲考科解析

考試日期：112年5月10~11日

1	2	3	4	5	6	7	8	9-1	10-1	10-2	10-3	11-1	11-2
4	5	4	145	2345	23	135	235	3	1	4	3	2	0
12	13	14	15-1	16	17								
24			0										

第壹部分：選擇題

一、單選題

1. <法一>

M 為旋轉矩陣，$\sin\theta=\frac{4}{5}$，$\cos\theta=-\frac{3}{5}$

$\Rightarrow 120°<\theta<135°$，

故選(4)。

<法二>

設直線過 $(k,0),(0,k)$（其中 $k>0$），

$$\begin{bmatrix}-\frac{3}{5} & -\frac{4}{5}\\ \frac{4}{5} & -\frac{3}{5}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}k\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\frac{3}{5}k\\ \frac{4}{5}k\end{bmatrix},$$

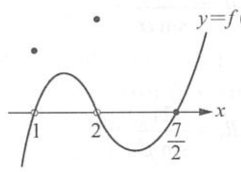
$$\begin{bmatrix}-\frac{3}{5} & -\frac{4}{5}\\ \frac{4}{5} & -\frac{3}{5}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\k\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\frac{4}{5}k\\ -\frac{3}{5}k\end{bmatrix},$$

經 M 變換後，$m=\dfrac{-\frac{3}{5}k-\frac{4}{5}k}{-\frac{4}{5}k-(-\frac{3}{5}k)}=7$，

故選(4)。

2. (1)(2)(3) ×：反例：

$$f(x)=\begin{cases}(x-1)(x-2)(2x-7) & ，x\neq1且x\neq2\\ 2 & ，x=1\\ 3 & ，x=2\end{cases}。$$



(4) ×：$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)}{(x-1)(x-2)}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)}{x-1}\times\dfrac{1}{x-2}$

$=5\times\dfrac{1}{-1}=-5\neq-15$。

(5) ○：$\lim\limits_{x\to1}f(x)=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)}{x-1}\times(x-1)=5\times0=0$，

$\lim\limits_{x\to2}f(x)=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{f(x)}{x-2}\times(x-2)=-3\times0=0$。

故選(5)。

3. 令兩圖形為 Γ_1,Γ_2

設 Γ_1 週期為 P_1，振幅為 a_1，

Γ_2 週期為 P_2，振幅為 a_2 ($P_1<P_2$，$a_1>a_2$)，

由圖知 $P_1=\frac{3}{4}P_2$。

<case 1>

Γ_1 為 $y=\sin(x-\frac{\pi}{6})\Rightarrow\begin{cases}P_1=2\pi\\a_1=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}P_2=\frac{8}{3}\pi\\a_2<1\end{cases}\Rightarrow$ 選項(2)。

但選項(2) $y=\frac{2}{3}\sin(\frac{3}{4}x-\frac{\pi}{6})$ 沒有過 $(\frac{\pi}{6},0)$，故不合。

<case 2>

Γ_2 為 $y=\sin(x-\frac{\pi}{6})\Rightarrow\begin{cases}P_2=2\pi\\a_2=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}P_1=\frac{3}{2}\pi\\a_1>1\end{cases}\Rightarrow$ 選項(4)。

因為選項(4) $y=\frac{3}{2}\sin(\frac{4}{3}x-\frac{2}{9}\pi)$ 過 $(\frac{\pi}{6},0)$。

故選(4)。

二、多選題

4. (1) ○：$p=\frac{1}{10}$，$n=25$ 之二項分佈，

中獎次數期望值 $=np=2.5$。

(2) ×：$p=\frac{1}{10}$，$n=25$ 之二項分佈，

中獎次數標準差 $=\sqrt{npq}=1.5$。

(3) ×：

情形	中,中	中,×	×,中	×,×
獎金 Y	200	100	200	0
P	$\frac{1}{10}\times\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}\times\frac{9}{10}$	$\frac{9}{10}\times\frac{1}{10}$	$\frac{9}{10}\times\frac{9}{10}$

$E(Y)=200\times(\frac{1}{100}+\frac{9}{100})+100\times\frac{9}{100}=29$（元）。

(4) ○：

獎金 Y	300	200	100	0
P	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}\times\frac{9}{10}$	$\frac{1}{10}\times(\frac{9}{10})^2$	$(\frac{9}{10})^3$

$E(Y)=56.1$（元）。

(5) ○：

獎金 Y	$(n+1)\times100$	0
P	$\frac{1}{10}$	$\frac{9}{10}$

$E(Y)=10(n+1)$，

E（獲利）$=10(n+1)-50>0$，

$n>4$，所以 n 之最小值 $=5$。

故選(1)(4)(5)。

5. $f(x)=2^{-x^2+2x+1}=2^{-(x-1)^2+2}$，

當 $x=1$ 時，$f(x)$ 有最大值 $=2^2=4$，

當 $x=\pi$ 時，$f(x)$ 在區間 $[0,\pi]$ 有最小值 $=2^{-(\pi-1)^2+2}$，

$g(x)=a\sin x+2\cos x=\sqrt{a^2+4}\sin(x+\theta)$，

其中 $\sin\theta=\dfrac{2}{\sqrt{a^2+4}}$，$\cos\theta=\dfrac{a}{\sqrt{a^2+4}}$，且 $\theta\in(0,\frac{\pi}{2})$，

當 $x=\frac{\pi}{2}-\theta$ 時，$g(x)$ 有最大值 $=\sqrt{a^2+4}$，

當 $x=\pi$ 時，$g(x)$ 在區間 $[0,\pi]$ 有最小值 $=-2$。

(1) × (2) ○：$m=f(\pi)=2^{-(\pi-1)^2+2}\approx2^{-2.14^2+2}<2^{-2}=\frac{1}{4}$。

(3) ○：$M=4=N=\sqrt{a^2+4}\Rightarrow a=2\sqrt{3}$。

(4) ○：$\sin\theta=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$，$\cos\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}\Rightarrow\theta=\frac{\pi}{6}$，

$N=g(\frac{\pi}{2}-\theta)=g(\frac{\pi}{3})$。

(5) ○：$n=g(\pi)=-2$。

故選(2)(3)(4)(5)。

6. 設 $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ $(r>0)$

$\Rightarrow z^n=r^n(\cos n\theta+i\sin n\theta)$,

所以 $\begin{cases}a_n=r^n\cos n\theta\\ b_n=r^n\sin n\theta\end{cases}$,

又 $\begin{bmatrix}a_2\\b_2\end{bmatrix}=P\begin{bmatrix}a_1\\b_1\end{bmatrix}\Rightarrow P=\begin{bmatrix}r\cos\theta & -r\sin\theta\\ r\sin\theta & r\cos\theta\end{bmatrix}$

(或由 $z^2=z\cdot r(\cos\theta+i\sin\theta)$ 知 $P=r\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}$)。

(1) ×:$a_1+b_1=r(\cos\theta+\sin\theta)=1$,

當 $\theta\neq 0$ 時,$-r\sin\theta+r\cos\theta=r(\cos\theta-\sin\theta)\neq 1$

$\Rightarrow P$ 不是轉移矩陣。

(2) ○:$a_1^2+b_1^2=r^2(\cos^2\theta+\sin^2\theta)=r^2=1$

$\Rightarrow r=1$(因為 $r>0$),

所以 $P=\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}$ 為旋轉矩陣。

(3) ○ (4) × (5) ×:

$\frac{a_2}{a_1}=\frac{a_3}{a_2}\Leftrightarrow\frac{r^2\cos 2\theta}{r\cos\theta}=\frac{r^3\cos 3\theta}{r^2\cos 2\theta}$

$\Leftrightarrow\cos^2 2\theta=\cos\theta\cdot\cos 3\theta$

$\Leftrightarrow(2\cos^2\theta-1)^2=\cos\theta\cdot(4\cos^3\theta-3\cos\theta)$

$\Leftrightarrow 4\cos^4\theta-4\cos^2\theta+1=4\cos^4\theta-3\cos^2\theta$

$\Leftrightarrow\cos^2\theta=1\Leftrightarrow\cos\theta=\pm1\Leftrightarrow\theta=0$ 或 π,

所以 $\sin\theta=0\Leftrightarrow z=\bar{z}$,

$P=\begin{bmatrix}r & 0\\ 0 & r\end{bmatrix}$ 或 $\begin{bmatrix}-r & 0\\ 0 & -r\end{bmatrix}$($-r<0$,不為伸縮矩陣),

公比 $=\frac{r^2\cos 2\theta}{r\cos\theta}=r$ 或 $-r=\sqrt{a_1^2+b_1^2}$ 或 $-\sqrt{a_1^2+b_1^2}$。

故選(2)(3)。

7. (1) ○:設 $\overline{AB}=x$,$\angle BAP=\theta$,則 $\cos\theta=\frac{8}{x}$

$\Rightarrow\frac{1}{x}=\frac{\overline{PQ}}{\overline{BC}}=\cos(\theta+60^\circ)=(\cos\theta)\cdot\frac{1}{2}-(\sin\theta)\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$

$=\frac{4}{x}-\frac{\sqrt{x^2-64}}{x}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\Leftrightarrow\frac{\sqrt{3(x^2-64)}}{2x}=\frac{3}{x}\Leftrightarrow\sqrt{3(x^2-64)}=6$

$\Leftrightarrow x=\sqrt{76}$(註:在和角公式時即可知有解)。

(2) ×:$\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}=-\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$。

(3) ○:$\overrightarrow{AF}\cdot\overrightarrow{AP}=(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC})\cdot\overrightarrow{AP}=-\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{AP}$

$=-8\times8+1\times8=-56$。

(4) ×:$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AP}=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})\cdot\overrightarrow{AP}=[\overrightarrow{AB}+(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AF})]\cdot\overrightarrow{AP}$

$=2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{AF}\cdot\overrightarrow{AP}$

$=2\times8\times8+(-5)\times8=88$。

(5) ○:$\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AP}=(2\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{AB})\cdot\overrightarrow{AP}=2\overrightarrow{AF}\cdot\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AP}$

$=-2\times5\times8+8\times8=-16$。

故選(1)(3)(5)。

8. (1) ×:$\overrightarrow{n_E}=(0,4,-3)$,$\overrightarrow{n_{xy}}=(0,0,1)$,

$\cos\theta=\pm\frac{\overrightarrow{n_E}\cdot\overrightarrow{n_{xy}}}{|\overrightarrow{n_E}||\overrightarrow{n_{xy}}|}=\pm\frac{-3}{5\times1}=\pm\frac{3}{5}\Rightarrow\sin\theta=\frac{4}{5}$。

(2) ○:圓心在 xy 平面投影點為橢圓中心 $(6,6,0)$,

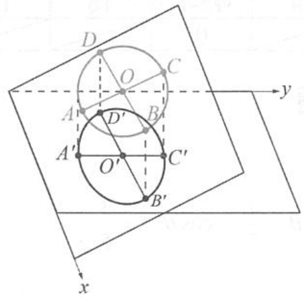
所以圓心為 $(6,6,k)$ 代入 $E\Rightarrow k=8$。

(3) ○:$\overleftrightarrow{BD}\,//\,x$ 軸(交線)$//\,\overleftrightarrow{B'D'}$,所以 $\overline{B'D'}=\overline{BD}=10$,

$\overleftrightarrow{AC}\perp x$ 軸,$\overleftrightarrow{A'C'}\perp x$ 軸,

所以 $\overline{A'C'}=\overline{AC}\cdot|\cos\theta|=6$,

所以 $m=(\frac{10}{2})^2=25$,$n=(\frac{6}{2})^2=9$。



(4) ×:$\overline{PQ}$ 最大值 $=\overline{CC'}=\overline{OO'}+\overline{OC}\times\sin\theta=8+5\times\frac{4}{5}=12$。

(5) ○:$\overline{PQ}$ 最大值 $=\overline{CA'}=\sqrt{\overline{CC'}^2+\overline{A'C'}^2}=\sqrt{12^2+6^2}$

$=\sqrt{180}>13$。

故選(2)(3)(5)。

三、選填題

9. $y_1=\log_4 3$,$y_2=\log_4 6$,$m=\frac{y_2-y_1}{6-3}=\frac{\log_4 2}{3}=\frac{1}{6}$,

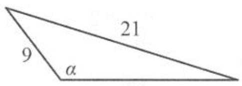
所以 L:$y=\frac{1}{6}x+\log_4 3-\frac{1}{2}\Rightarrow y_3=\frac{9}{6}+\log_4 3-\frac{1}{2}=\log_4 12$

$\Rightarrow\log_4 12=\log_a 9\Leftrightarrow\frac{\log 12}{\log 4}=\frac{\log 9}{\log a}\Leftrightarrow\log a=\frac{\log 4\cdot\log 9}{\log 12}$,

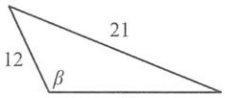
所以 $\frac{bc}{d}=\frac{4\times9}{12}=3$。

10. 可構成之△為 $(9,12,15)$,$(9,15,21)$,$(12,15,21)$,

$(9,12,15)$ 為直角△,$R_1=\frac{15}{2}$。



$R_2=\frac{21}{\sin\alpha}$,



$R_3=\frac{21}{\sin\beta}$,

$\cos\alpha=\frac{9^2+15^2-21^2}{2\times9\times15}=-\frac{1}{2}\Rightarrow R_2=14\sqrt{3}$,

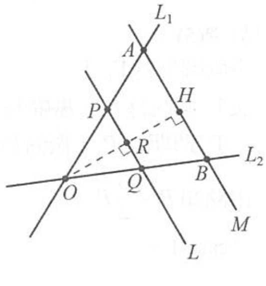
$\cos\beta=\frac{12^2+15^2-21^2}{2\times12\times15}=-\frac{1}{5}\Rightarrow R_3=\frac{35\sqrt{6}}{4}$,

因為 $\sin\beta>\sin\alpha$,所以 $R_3<R_2$(若由圖形直接判讀 $\alpha>\beta>90^\circ\Rightarrow\sin\beta>\sin\alpha$,則僅須計算 R_2 為 $14\sqrt{3}$)。

11. $L\,//\,M$,$R(1,1,1)\in L$,

$\overrightarrow{OR}\cdot\overrightarrow{\ell}=0\Rightarrow\overline{OR}\perp L$,

$\overleftrightarrow{OR}$:$\begin{cases}x=t\\ y=t\ (t\in R)\\ z=t\end{cases}$ 代入 M



$\Rightarrow\frac{t-3}{1}=\frac{t-1}{2}=\frac{t-11}{-3}$

$\Rightarrow t=5\Rightarrow H(5,5,5)$,

因為 $\overline{OH}=5\overline{OR}$,

所以 $\overline{AB}=5\overline{PQ}=20$。

第貳部分、混合題或非選擇題

12. (1) ×：$f(x)\in R[x]$，$f(1-i)=4\Rightarrow f(1+i)=\overline{4}=4$。
(2) ○：$f(x)=(x^2-2x+2)(x^2+4)Q(x)+r(x)$，
$f(-2i)=0+r(-2i)$。
(3) ×：$f(1+i)=f(1-i)=4$，$\Rightarrow$ 若 $\deg(f)=2$，
則 $f(x)=(x^2-2x+2)\cdot a+4$，$(a\in R)$
$f(2i)=(-2-4i)a+4\neq 24$（不合）。
(4) ○：由虛根成對定理知，奇數次實數係多項方程式必有實根。
(5) ×：反例：
$f(x)=-\frac{1}{2}(x^2-2x+2)(x^2+4)+(x^2-2x+2)(2x-2)+4$，
滿足 $f(1+i)=4$，$f(2i)=24$，
滿足 $f(0)=-4<0$，$f(1)=\frac{3}{2}>0$，
所以 $f(x)=0$ 有實根。
故選(2)(4)。

13. $r(1+i)=r(1-i)=4$，
設 $r(x)=(x^2-2x+2)(ax+b)+4$（a、$b\in R$），（1分）
$r(2i)=(-2-4i)(2ai+b)+4=24$
$\Leftrightarrow\begin{cases}-4a-4b=0\\8a-2b+4=24\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=2\\b=-2\end{cases}$，（1分）
所以 $r(x)=(x^2-2x+2)(2x-2)+4=2x^3-6x^2+8x$。（2分）

14. $\begin{cases}y=2x^3-6x^2+8x\\y=26x+k\end{cases}$，有三相異實根，
$2x^3-6x^2-18x-k=0$，有三相異實根，
令 $g(x)=2x^3-6x^2-18x-k$，（1分）
$g'(x)=6x^2-12x-18=6(x-3)(x+1)$，
$g'(x)=0\Rightarrow x=3$ 或 -1，（1分）

x		-1		3	
$g'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$g(x)$	↗	$10-k$	↘	$-54-k$	↗

$g(x)=0$ 有三相異實根
$\Leftrightarrow\begin{cases}10-k>0\\-54-k<0\end{cases}\Leftrightarrow -54<k<10$。（2分）

15. $f''(0)=0\Rightarrow$ 對稱點為 $(0,f(0))$，
所以 $f(x)=x^3+px+f(0)$ 在 $x=0$ 的一次近似為 $y=px+f(0)$，
所以 $p=-13$，$f(0)=k$，
即 $f(x)=x^3-13x+k$，
$f(x)=0$ 之三根為 a,b,c，
由根與係數知 $a+b+c=0$。

16. <法一>
$\begin{cases}a+b+c=0\cdots\cdots\cdots\cdots①\\ab+bc+ca=-13\cdots\cdots②\\abc=-k\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots③\end{cases}$，（1分）
$\frac{b-a}{c-b}=\frac{2}{5}\Leftrightarrow b=\frac{5a+2c}{7}$ 代入 ① $\Rightarrow a=-\frac{3}{4}c\Rightarrow b=-\frac{1}{4}c$，
$\begin{cases}a=-\frac{3}{4}c\\b=-\frac{1}{4}c\end{cases}$ 代入 ② $\Rightarrow c=4$，$a=-3$，$b=-1$（1分）
$\Rightarrow k=-12$。（2分）
<法二>
令 $\overline{AB}=2t$，$\overline{BC}=5t$（$t>0$），
則 $b=a+2t$，$c=a+7t$，（1分）
又 $a+b+c=0\Rightarrow a=-3t$，$b=-t$，$c=4t$（1分）
$\Rightarrow x^3-13x+k=(x+3t)(x+t)(x-4t)$，
比較係數得 $t=1$，$k=-12$。（2分）

17. $R_1+R_2=\int_{-3}^{-1}f(x)\,dx-\int_{-1}^{4}f(x)\,dx$（1分）
$=(\frac{1}{4}x^4-\frac{13}{2}x^2-12x)\Big|_{-3}^{-1}-(\frac{x^4}{4}-\frac{13}{2}x^2-12x)\Big|_{-1}^{4}$
$=\frac{407}{4}$。（3分）