

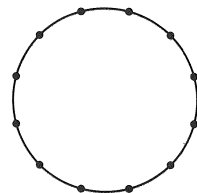
112 學年度全國高級中學分科測驗數學甲(112-E6)



第壹部分：選擇(填)題(占 76 分)

一、單選題(占 18 分)

- 已知空間中三點 $A(6, 2, 3)$ 、 $B(0, -1, -3)$ 、 $C(8, -5, 1)$ ，在 \overline{AB} 及 \overline{BC} 線段上分別取 D 、 E 兩點使得直線 DE 可以平分 $\triangle ABC$ 的面積。若 D 點的坐標為 $(4, 1, 1)$ ，則 E 點坐標應為下列何者？
 (1) $(1, -\frac{3}{2}, -\frac{5}{2})$ (2) $(2, -2, -2)$ (3) $(4, -3, -1)$ (4) $(6, -4, 0)$ (5) $(8, -5, 1)$
- 如右圖，已知圓周上有 12 個等分點，且隨機取到每一點的機會相同，若從 12 個等分點中，任意選取 4 個等分點作為頂點構成一個四邊形，則此四邊形至少有一個角為直角的機率為下列何者？
 (1) $\frac{8}{33}$ (2) $\frac{10}{33}$ (3) $\frac{3}{11}$ (4) $\frac{20}{33}$ (5) $\frac{6}{11}$
- 設 $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_5$ 為 $x^5 = i$ 的根，其中 $i = \sqrt{-1}$ 。若 $\omega_n = a_n + ib_n$ ，其中 a_n, b_n 為實數， $n=1, 2, 3, 4, 5$ ，並將 $O(0, 0), P_1(a_1, b_1), P_2(a_2, b_2), \dots, P_5(a_5, b_5)$ 畫在直角坐標平面上，則 $y = \log|x|$ 的圖形和 $\overline{OP_1}, \overline{OP_2}, \dots, \overline{OP_5}$ 這五個線段共有幾個交點？
 (1) 1 個 (2) 2 個 (3) 3 個 (4) 4 個 (5) 5 個



二、多選題(占 40 分)

- 已知空間中三向量 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ ，則下列選項哪些是正確的？
 (1) $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$ (2) $(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$
 (3) $(3\vec{a} + 2\vec{b}) \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = (2\vec{a} + 3\vec{b}) \cdot (\vec{a} \times \vec{b})$
 (4) $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$ (5) $(\vec{a} \times \vec{c}) \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$
- 下列哪些函數在區間 $(2, 3)$ 上為遞增函數？ (1) $f_1(x) = x^2$ (2) $f_2(x) = \cos x$
 (3) $f_3(x) = \tan x$ (4) $f_4(x) = \log x$ (5) $f_5(x) = 0.3^x$
- 坐標平面上，將函數 $h(x) = 12 \cos(4x) + 9 \cos(4x + \frac{\pi}{2}) + 2, x > 0$ 的圖形與直線 $y = k$ 的交點，由左至右依序標上 $(a_1, b_1), (a_2, b_2), \dots, (a_n, b_n), \dots$ 。令 $T_n = a_{n+1} - a_n$ ，則實數 k 為哪些值時， $\lim_{n \rightarrow \infty} T_n$ 存在？ (1) -13 (2) -6 (3) 2 (4) 10 (5) 17
- 已知坐標空間中點 $P(1, 2, 3)$ 是平面 E 上距離原點 $O(0, 0, 0)$ 最近的點，請選出正確的選項。
 (1) 向量 $(1, 2, 3)$ 為平面 E 的法向量 (2) 點 P 也是平面 E 上距離點 $(-1, -2, -3)$ 最近的點
 (3) 平面 E 的方程式為 $x + 2y + 3z = 14$ (4) 點 $(3, 1, 4)$ 到平面 E 的距離大於 1
 (5) 通過原點 O 和點 $(1, 1, -1)$ 的直線與平面 E 會相交
- 小德、小哲兩人參與一個猜數字遊戲，已知其答案為 1, 2, 3, 4 所組成的一組四位數字(數字不重複)，但數字順序不知，今由小德 \rightarrow 小哲的順序依次猜數字，兩人都只有一次猜數字的機會，在小德猜完數字之後，主持人會報告哪幾個數字位置正確(也表示其他數字位置錯誤)，再由小哲猜數字。舉例來說：若小德猜 1423，主持人說數字 1, 2 位置正確，則換小哲猜時，根據主持人說法判斷 3, 4 位置錯誤，故小哲必定能回答出正確答案 1324。若每一組四位數字為答案的機率相同，則下列選項的描述哪些是正確的？
 (1) 小德猜對的機率為 $\frac{1}{12}$ (2) 在主持人說小德猜的數字中只有 3 的位置正確的條件下，

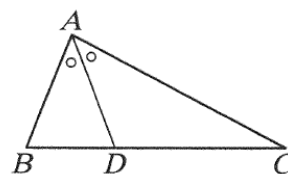
小哲猜對的機率為 $\frac{1}{2}$ (3) 小德猜的數字只有一個數字位置正確且小哲猜對的機率為 $\frac{1}{6}$

(4) 小德猜的數字位置都不對的機率為 $\frac{3}{8}$ (5) 在小哲猜對的條件下，小德猜的數字只有一個數字位置正確的機率為 $\frac{4}{11}$

三、選填題(占 18 分)

9. 已知實數 x 滿足 $|x-1| \leq 2$ ，若函數 $y = f(x) = 2x^2 - 3x + 1$ 的最大值為 h ，最小值為 k ，則 $h+k$ 之值為_____。

10. 如右圖所示，在 $\triangle ABC$ 中， $\angle BAC$ 的角平分線 \overline{AD} 交對邊 \overline{BC} 於 D ，已知 $\overline{BD} = 3, \overline{CD} = 6, \overline{AB} = \overline{AD}$ ，試求 $\cos \angle BAD$ 之值為_____。(化為最簡分數)



11. 已知實係數多項式函數 $f(x)$ ， $g(x)$ 滿足 $f(2) = 2, f'(2) = 3, g(2) = 7, g'(2) = 8$ ，則

$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)g(x) - 14}{x - 2}$ 之值為_____。

第貳部分：混合題或非選擇題(占 24 分)

12-14 題為題組

已知 $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + 6$ 為實係數三次多項式函數且 $y = g(x)$ 為 $y = f(x)$ 在 $x=2$ 附近的一次近似函數，若 $f(x)$ 滿足 $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) + 4}{x - 2} = -1$ ，試回答下列問題。

12. 試求函數 $y = g(x)$ 為何？(單選題，3 分)

- (1) $-x+1$ (2) $-x-2$ (3) $x+1$ (4) $x-6$ (5) $-x-6$

13. 試求 $f(x)$ 除以 $x(x-2)^2$ 的商式為_____及餘式為_____。(選填題，4 分)

14. 已知一次的數 $y = h(x)$ 與 $y = g(x)$ 相異，且兩函數圖形的斜率相同，若函數 $y = h(x)$ 的圖形與函數 $y = f(x)$ 的圖形相切，則函數 $y = h(x)$ 為何？(非選擇題，5 分)

15-17題為題組

已知坐標平面上 $O(0,0)$ 為原點，並令點 $A(a_1, a_2)$ 、 $B(b_1, b_2)$ 的對應的複數分別為

$z_1 = a_1 + a_2i$ 、 $z_2 = b_1 + b_2i$ ， $i = \sqrt{-1}$ 。若 $\frac{z_2}{z_1} = -5 + 5\sqrt{3}i$ ，且 $|z_1 - z_2| = 3\sqrt{37}$ ，試回答下列問題。

15. 試求 $\triangle AOB$ 的面積為何？(單選題，4分)

- (1) $\frac{15\sqrt{3}}{2}$ (2) $\frac{15\sqrt{3}}{4}$ (3) $5\sqrt{3}$ (4) $10\sqrt{3}$ (5) $15\sqrt{3}$

16. 已知 $C(c_1, c_2)$ 在坐標平面上且滿足 $\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$ ，若 A 在第一象限且 O, B, C 三點共線，則 A 點坐標 (a_1, a_2) 為何？(非選擇題，4分)

17. 承第16.題，若此坐標平面上有一圓與直線 OA 相切於 A 點，且此圓亦與直線 OB 相切於線段 \overline{OB} 上一點，則此圓的圓心坐標與半徑為何？(非選擇題，4分)

參考數值： $\sqrt{2} \approx 1.414$ ， $\sqrt{3} \approx 1.732$ ， $\sqrt{5} \approx 2.236$ ， $\sqrt{6} \approx 2.449$ ， $\pi \approx 3.142$

對數值： $\log 2 \approx 0.3010$ ， $\log 3 \approx 0.4771$ ， $\log 5 \approx 0.6990$ ， $\log 7 \approx 0.8451$

RA6113 112 學年度全國高級中學分科測驗數學甲(112-E6)

參考答案

選擇題：1.(4) 2.(3) 3.(2) 4.(1)(3)(4) 5.(1)(3)(4) 6.(1)(3)(5) 7.(1)(2)(3) 8.(2)(3)(4)(5)

選填題：9. $\frac{79}{8}$ 10. $\frac{3}{4}$ 11. 37

混合題或非選擇題：12.(2) 13.商式為 1，餘式為 $2x^2 - 9x + 6$ 14. $y = h(x) = -x + \frac{202}{27}$

15.(1) 16. $(\frac{\sqrt{6}}{2}, \frac{\sqrt{6}}{2})$ 17.圓心坐標為 $(\frac{\sqrt{6}-3\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{6}+3\sqrt{2}}{2})$ ，半徑為 3