數學甲考科詳解

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.
(4)	(3)	(2)	(1)(3)(4)	(1)(3)(4)	(1)(3)(5)	(1)(2)(3)
8.						
(2)(3)(4)(5)						

第壹部分、選擇(填)題

一、單選題

1. (4)

出處：第四冊〈空間向量〉

目標：能利用三角形面積公式求出比例，再使用分點公式求出點坐標

解析：由題意可知 $\overrightarrow{BA}=(6,3,6)$，$\overrightarrow{BD}=(4,2,4)$，

故 $\overrightarrow{BD}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{BA}$

設 $\overrightarrow{BE}=k\overrightarrow{BC}$，利用面積 $\dfrac{1}{2}\triangle ABC=\triangle BDE$，

又 $\angle ABC=\angle DBE$

$\Rightarrow \dfrac{1}{2}\times\left(\dfrac{1}{2}|\overrightarrow{BA}||\overrightarrow{BC}|\sin\angle ABC\right)$

$=\dfrac{1}{2}|\overrightarrow{BD}||\overrightarrow{BE}|\sin\angle DBE$

$=\dfrac{1}{2}\left|\dfrac{2}{3}\overrightarrow{BA}\right||k\overrightarrow{BC}|\sin\angle ABC$

$\Rightarrow \dfrac{1}{2}=\dfrac{2}{3}\times k$

$\Rightarrow k=\dfrac{3}{4}$，因此 $\overline{BE}:\overline{EC}=3:1$

故 E 點坐標為

$\left(\dfrac{3\times8+1\times0}{4},\dfrac{3\times(-5)+1\times(-1)}{4},\dfrac{3\times1+1\times(-3)}{4}\right)$

$=(6,-4,0)$

故選(4)。

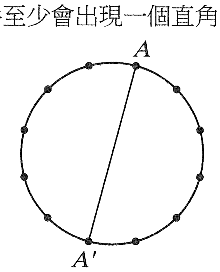
2. (3)

出處：第二冊〈排列組合與機率〉

目標：能討論圓周角為直角的組合，並計算出機率

解析：因為直徑所對的圓周角為直角，那我們不如隨機從六條直徑中選一條

如下圖所示，接著隨機從左右五個點中各找一個點，則此四邊形至少會出現一個直角



但須注意若此四邊形為長方形(同時取兩條直徑所形成的四邊形)時會多算一次

故 $\dfrac{C_1^6\times(C_1^5)^2-C_2^6}{C_4^{12}}=\dfrac{135}{495}=\dfrac{3}{11}$

故選(3)。

3. (2)

出處：選修數學甲(下)〈複數與多項式方程式〉、第三冊〈指數與對數函數〉

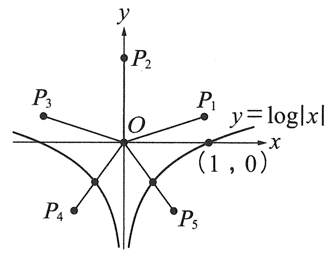
目標：能畫出 $x^5=i$ 的解在坐標平面上的位置與坐標平面上 $y=\log|x|$ 的圖形

解析：$x^5=i=\cos\left(\dfrac{\pi}{2}+2k\pi\right)+i\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+2k\pi\right)$

$\Rightarrow x=\cos\left(\dfrac{\pi}{10}+\dfrac{2k\pi}{5}\right)+i\sin\left(\dfrac{\pi}{10}+\dfrac{2k\pi}{5}\right)$，

$k=0$，1，2，3，4

故可知應如下圖有 2 個交點



故選(2)。

二、多選題

4. (1)(3)(4)

出處：第三冊〈平面向量〉、第四冊〈空間向量〉

目標：能判斷向量的運算，及其幾何意義

解析：(1)○

(2)╳：反例：若 $\vec{a}\,/\!/\,\vec{b}$，但 $\vec{c}$ 不與 $\vec{b}$ 平行，

此時 $(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c}=\vec{0}$，

但 $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})\neq\vec{0}$

(3)○：因為 $(3\vec{a}+2\vec{b})\perp(\vec{a}\times\vec{b})$，

所以 $(3\vec{a}+2\vec{b})\cdot(\vec{a}\times\vec{b})=0$

同理可得 $(2\vec{a}+3\vec{b})\cdot(\vec{a}\times\vec{b})=0$

(4)○：可利用行列式運算判斷正負值

$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=\begin{vmatrix}\vec{a}\\\vec{b}\\\vec{c}\end{vmatrix}$，

$\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})$

$=(\vec{b}\times\vec{c})\cdot\vec{a}$

$=\begin{vmatrix}\vec{b}\\\vec{c}\\\vec{a}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\vec{a}\\\vec{b}\\\vec{c}\end{vmatrix}$

(5)╳：$(\vec{a}\times\vec{c})\cdot\vec{b}$

$=\begin{vmatrix}\vec{a}\\\vec{c}\\\vec{b}\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}\vec{a}\\\vec{b}\\\vec{c}\end{vmatrix}$

$\neq\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})$

故選(1)(3)(4)。

5. (1)(3)(4)

出處：第一冊〈多項式函數〉、第三冊〈三角函數〉、〈指數與對數函數〉

目標：判斷哪些函數在範圍內為遞增函數

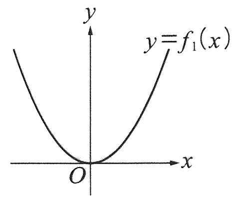
解析：(1) ○：如圖(一)，$f_1(x)=x^2$ 在 $x>0$ 皆為遞增函數

(2) ╳：如圖(二)，區間 $(2,3)$ 弧度在第二象限，
$f_2(x)=\cos x$ 為遞減函數

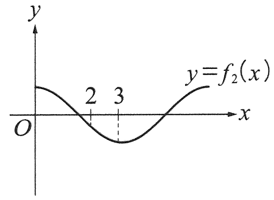
(3) ○：如圖(三)，區間 $(2,3)$ 弧度在第二象限，
$f_3(x)=\tan x$ 為遞增函數

(4) ○：如圖(四)，$f_4(x)=\log x$ 在 $x>0$ 皆為遞增函數

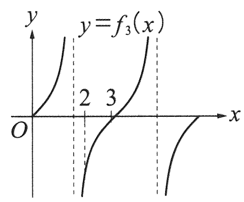
(5) ╳：如圖(五)，$f_5(x)=0.3^x$ 遞減函數



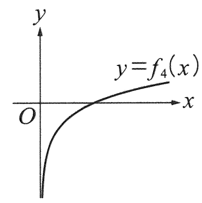
圖(一)



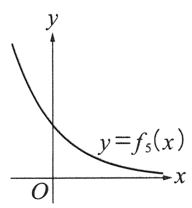
圖(二)



圖(三)



圖(四)



圖(五)

故選(1)(3)(4)。

6. (1)(3)(5)

出處：第三冊〈三角函數〉、選修數學甲(上)〈極限與函數〉

目標：理解極限的意義並判斷三角函數疊合圖形

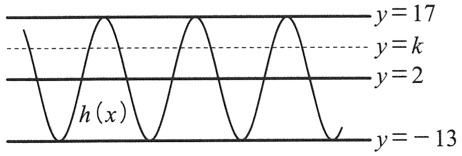
解析：$h(x)=12\cos(4x)+9\cos\left(4x+\dfrac{\pi}{2}\right)+2$

$=12\cos 4x-9\sin 4x+2=15\sin(4x+\theta)+2$，

其中 $\sin\theta=\dfrac{4}{5}$，$\cos\theta=-\dfrac{3}{5}$

如下示意圖，我們可以想像在 $x\to\infty$ 時，除了圖中三條粗線 (k 有最大值、k 有最小值與中心線)

其餘 k 值皆使 T_n 之值會不斷變大變小，即沒有極限存在，故三條粗線為所求



故選(1)(3)(5)。

7. (1)(2)(3)

出處：第四冊〈空間中的平面與直線〉

目標：能利用給定的條件，計算出平面方程式，並判斷點或直線與平面的關係

解析：(1) ○：由題目可知點 P 為原點 O 在平面 E 上的投影點，故 $\overrightarrow{OP}\perp$ 平面 E，得 $\overrightarrow{OP}=(1,2,3)$ 為平面 E 的一個法向量

(2) ○：設 $Q(-1,-2,-3)$，計算 $\overrightarrow{QP}=(2,4,6)$ 與平面 E 的法向量 $\overrightarrow{OP}=(1,2,3)$ 平行
故點 P 也是平面 E 上距離點 $Q(-1,-2,-3)$ 最近的點

(3) ○：由平面法向量 $\overrightarrow{OP}=(1,2,3)$ 與平面上一點 $P(1,2,3)$ 可知平面 E 的方程式為
$x+2y+3z=14$

(4) ╳：設 $A(3,1,4)$，

則所求 $d(A,E)=\dfrac{|1\times3+2\times1+3\times4-14|}{\sqrt{1^2+2^2+3^2}}$

$=\dfrac{3}{\sqrt{14}}<1$

(5) ╳：設 $B(1,1,-1)$，

計算 $\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OP}=(1,1,-1)\cdot(1,2,3)=0$，
且 $B(1,1,-1)$ 不在平面 E：$x+2y+3z=14$ 上，
故直線 OB 與平面 E 平行不相交

故選(1)(2)(3)。

8. (2)(3)(4)(5)

出處：第二冊〈排列組合與機率〉、第四冊〈機率〉

目標：利用錯排概念，計算條件機率

解析：(1) ╳：小德猜對的機率為 $\dfrac{1}{4!}=\dfrac{1}{24}$

(2) ○：假設小德猜 3124，只有數字 3 的位置正確的話，表示 1，2，4 位置錯誤

124 $\xrightarrow[\text{三個位置全錯}]{}$ 412 或 241

故正確答案為 3412 或 3241，

小哲猜對的機率為 $\dfrac{1}{2}$

註：三個數字位置的錯排可由取捨原理知道有幾組：$3!-C^3_1\times2!+C^3_2\times1!-C^3_3\times0!=2$

(3) ○：$\underbrace{\dfrac{\overbrace{C^4_1}^{\text{四個數字哪一個正確}}\times\overbrace{C^3_3\times2}^{\text{其餘三個錯排}}}{4!}}_{\text{小德猜的數字只有一個數字位置正確的機率}}\times\underbrace{\dfrac{1}{2}}_{\text{同選項(2)，在已知只有一個數字位置正確的條件下小哲猜對的機率}}=\dfrac{1}{6}$

(4) ○：$\dfrac{\overbrace{4!-C^4_3\times3!+C^4_2\times2!-C^4_1\times1!+C^4_0\times0!}^{\text{四個數字位置的錯排}}}{4!}$

$=\dfrac{9}{24}=\dfrac{3}{8}$

(5) ○：利用上述選項可知

①小德猜的數字位置都不對且小哲猜對的機率為 $\dfrac{3}{8}\times\dfrac{1}{9}=\dfrac{1}{24}$

註：利用選項(4)可知四個數字位置的錯排有 9 種可能，故小哲猜對的機率為 $\dfrac{1}{9}$

②小德猜的數字只有一個數字位置正確且小哲猜對的機率為 $\dfrac{1}{6}$

③<u>小德</u>猜的數字只有兩個數字位置正確且<u>小哲</u>猜對的機率為

$$\frac{\overset{\text{四個數字哪兩個數字位置正確}}{\overbrace{C_2^4}} \times \overset{\text{兩個數字位置的錯排只有一種}}{1}}{4!} \times \overset{\text{由題幹敘述可知小哲必猜對}}{1} = \frac{1}{4}$$

其他情況都不可能發生

故所求為 $\dfrac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{24}+\frac{1}{6}+\frac{1}{4}}=\dfrac{4}{11}$，故選(2)(3)(4)(5)。

三、選填題

9. $\dfrac{79}{8}$

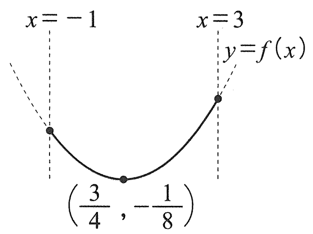
出處：第一冊〈數與式〉、〈多項式函數〉

目標：能將絕對值不等式範圍解出，並計算二次函數的極值

解析：利用 $|x-1|\le 2$ 得 $-2\le x-1\le 2$，可知 $-1\le x\le 3$

將 $y=f(x)=2x^2-3x+1$ 配方得 $y=f(x)=2\left(x-\frac{3}{4}\right)^2-\frac{1}{8}$

如下圖，最小值 $k=f\left(\frac{3}{4}\right)=-\frac{1}{8}$



最大值 $h=f(3)=2\times 9-3\times 3+1=10$

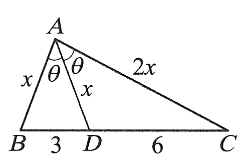
故 $h+k=10+\left(-\frac{1}{8}\right)=\frac{79}{8}$。

10. $\dfrac{3}{4}$

出處：第二冊〈三角比〉

目標：使用餘弦定理解決幾何問題

解析：如下圖，設 $\overline{AB}=\overline{AD}=x$，$\angle BAD=\angle CAD=\theta$



依題意 $\overline{AD}$ 為角平分線，利用內分比可知

$\overline{AB}:\overline{AC}=3:6=1:2$，故 $\overline{AC}=2x$

在△ABD 中，$3^2=x^2+x^2-2x^2\cos\theta \Rightarrow \cos\theta=\dfrac{2x^2-9}{2x^2}$

在△ACD 中，$6^2=x^2+(2x)^2-4x^2\cos\theta$

$\Rightarrow \cos\theta=\dfrac{5x^2-36}{4x^2}$

$\cos\theta=\dfrac{2x^2-9}{2x^2}=\dfrac{5x^2-36}{4x^2}$，相消整理可得 $x^2=18$

$\Rightarrow x=3\sqrt{2}$，故所求 $\cos\theta=\dfrac{36-9}{36}=\dfrac{3}{4}$。

11. 37

出處：選修數學甲(上)〈微分〉

目標：理解微分的定義並使用微分公式

解析：$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)g(x)-14}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)g(x)-f(2)g(2)}{x-2}$ 為函數 $f(x)g(x)$ 在 $x=2$ 之導數

利用微分公式可知〔$f(x)g(x)$〕$'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$

故所求 $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)g(x)-14}{x-2}=f'(2)g(2)+f(2)g'(2)$

$=21+16=37$。

第貳部分、混合題或非選擇題

12. (2)

出處：第一冊〈多項式函數〉、選修數學甲(上)〈微分〉

目標：理解切線方程式與一次近似函數的關係

解析：依題意 $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)+4}{x-2}$ 存在且由 $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)+4}{x-2}=-1$ 可推得

$\lim\limits_{x\to 2}(f(x)+4)=\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{f(x)+4}{x-2}\cdot(x-2)\right)$

$=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)+4}{x-2}\cdot\lim\limits_{x\to 2}(x-2)=-1\cdot 0=0$

則 $\lim\limits_{x\to 2}(f(x)+4)=0$，得 $f(2)=-4$

故 $f(2)=-4$ 且 $f'(2)=-1$

$y=f(x)$ 在點 $(2, f(2))$ 的切線方程式為 $y=-x-2$

即 $y=f(x)$ 在 $x=2$ 附近的一次近似函數為 $g(x)=-x-2$，故選(2)。

13. 商式為 1，餘式為 $2x^2-9x+6$

出處：第一冊〈多項式函數〉

目標：假設多項式去求餘式

解析：設 $f(x)=x^3+ax^2+bx+6=x(x-2)^2Q(x)+p(x-2)^2+qx+r$

易知 $Q(x)=1$ 且利用第 12. 題結果可知 $qx+r=-x-2$

(亦可利用 $f(2)=-4$ 且 $f'(2)=-1$ 求得 q，r)

將 $x=0$ 代入可得 $6=4p-2\Rightarrow p=2$

故 $Q(x)=1$，餘式為 $p(x-2)^2+qx+r=2x^2-9x+6$。

14. $y=h(x)=-x+\dfrac{202}{27}$

出處：選修數學甲(上)〈微分〉

目標：理解三次函數圖形與其切線的關係

解析：承第 12. 題可設 $h(x)=-x+k$，利用第 13. 題結果

$f(x)=x(x-2)^2+2(x-2)^2-x-2=x^3-2x^2-5x+6$

可得 $f''(x)=6x-4$，令 $f''(x)=6x-4=0$

可知對稱中心在 $x=\dfrac{2}{3}$，利用對稱性可知

$y=h(x)=-x+k$ 在 $x=\dfrac{2}{3}\times 2-2=-\dfrac{2}{3}$ 時相切

將 $f\left(-\frac{2}{3}\right)=-\frac{2}{3}\left(-\frac{2}{3}-2\right)^2+2\left(-\frac{2}{3}-2\right)^2-\left(-\frac{2}{3}\right)-2$

$=\dfrac{220}{27}$

代入 $y=h(x)=-x+k$ 可得 $k=\dfrac{202}{27}$

故 $y=h(x)=-x+\dfrac{202}{27}$。

◎評分原則

承第 12. 題可設 $h(x)=-x+k$，利用第 13. 題結果
$f(x)=x(x-2)^2+2(x-2)^2-x-2=x^3-2x^2-5x+6$
可得 $f''(x)=6x-4$，令 $f''(x)=6x-4=0$ (1 分)

可知對稱中心在 $x=\frac{2}{3}$　(1 分)

利用對稱性可知

$y=h(x)=-x+k$ 在 $x=\frac{2}{3}\times2-2=-\frac{2}{3}$ 時相切

將 $f\left(-\frac{2}{3}\right)=-\frac{2}{3}\left(-\frac{2}{3}-2\right)^2+2\left(-\frac{2}{3}-2\right)^2-\left(-\frac{2}{3}\right)-2$

$=\frac{220}{27}$　(1 分)

代入 $y=h(x)=-x+k$ 可得 $k=\frac{202}{27}$　(1 分)

故 $y=h(x)=-x+\frac{202}{27}$。　(1 分)

15. (1)

出處：第二冊〈三角比〉、選修數學甲(下)〈複數與多項式方程式〉

目標：利用複數乘法的幾何意義，結合正餘弦定理計算所求

解析：$\frac{z_2}{z_1}=-5+5\sqrt{3}i=10\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$

設 $\overline{OA}=k$，利用上式可知 $\overline{OB}=10k$ 且 $\angle AOB=\frac{2\pi}{3}$

故 $\overline{AB}^2=|z_1-z_2|^2=333=k^2+(10k)^2-2\times k\times10k\times\cos\frac{2\pi}{3}$

解得 $k=\sqrt{3}$，

故△AOB 面積為 $\frac{1}{2}k\times10k\times\sin\frac{2\pi}{3}=\frac{15\sqrt{3}}{2}$，故選(1)。

16. $\left(\frac{\sqrt{6}}{2},\frac{\sqrt{6}}{2}\right)$

出處：第四冊〈矩陣〉

目標：利用鏡射矩陣公式求得夾角，並利用第 15. 題結果計算 A 點坐標

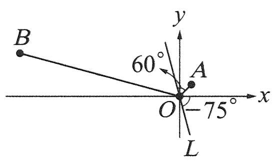
解析：由於 $\begin{bmatrix}-\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2}\end{bmatrix}$ 為對於 $L：y=(\tan\theta)x$ 的鏡射矩陣，

其中 $-90^\circ<\theta<90^\circ$，依題意 L 應為 $\angle AOB$ 的角平分線

利用鏡射矩陣公式可知 $\cos2\theta=-\frac{\sqrt{3}}{2}$，$\sin2\theta=-\frac{1}{2}$，

故 $\theta=-75^\circ$

又利用第 15. 題可知 $\angle AOB=\frac{2\pi}{3}=120^\circ$ 且 $\overline{OA}=\sqrt{3}$



如上圖，A 點的極坐標為 $[\sqrt{3},45^\circ]$

故 A 點坐標為 $\left(\frac{\sqrt{6}}{2},\frac{\sqrt{6}}{2}\right)$。

◎評分原則

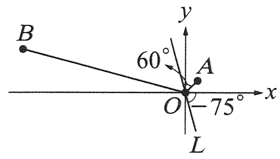
由於 $\begin{bmatrix}-\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2}\end{bmatrix}$ 為對於 $L：y=(\tan\theta)x$ 的鏡射矩陣，

其中 $-90^\circ<\theta<90^\circ$，依題意 L 應為 $\angle AOB$ 的角平分線

利用鏡射矩陣公式可知 $\cos2\theta=-\frac{\sqrt{3}}{2}$，$\sin2\theta=-\frac{1}{2}$　(1 分)

故 $\theta=-75^\circ$　(1 分)

又利用第 15. 題可知 $\angle AOB=\frac{2\pi}{3}=120^\circ$ 且 $\overline{OA}=\sqrt{3}$



如上圖，A 點的極坐標為 $[\sqrt{3},45^\circ]$　(1 分)

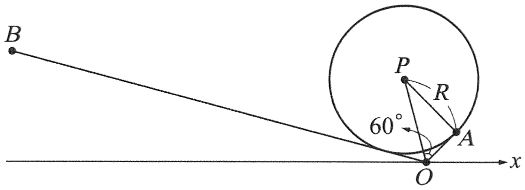
故 A 點坐標為 $\left(\frac{\sqrt{6}}{2},\frac{\sqrt{6}}{2}\right)$。　(1 分)

17. 圓心坐標為 $\left(\frac{\sqrt{6}-3\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{6}+3\sqrt{2}}{2}\right)$，半徑為 3

出處：選修數學甲(下)〈複數與多項式方程式〉

目標：利用複數的乘法，解決旋轉伸縮的幾何問題

解析：依題意，設圓心為 P，半徑為 R，如下圖



可將點 A 所代表的複數 $z_1=\frac{\sqrt{6}}{2}+\frac{\sqrt{6}}{2}i$

旋轉 60°，伸長 2 倍

設點 P 對應的複數為 z_P

故 $z_P=\left(\frac{\sqrt{6}}{2}+\frac{\sqrt{6}}{2}i\right)[2(\cos60^\circ+i\sin60^\circ)]$

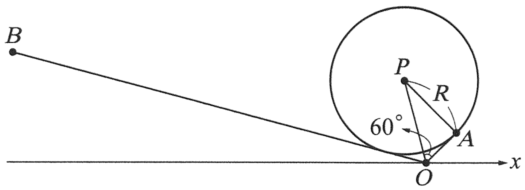
$=\frac{\sqrt{6}-3\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{6}+3\sqrt{2}}{2}i$

可知 $P\left(\frac{\sqrt{6}-3\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{6}+3\sqrt{2}}{2}\right)$，

又 $R=\overline{OA}\times\tan60^\circ=3$。

◎評分原則

依題意，設圓心為 P，半徑為 R，如下圖



可將點 A 所代表的複數 $z_1=\frac{\sqrt{6}}{2}+\frac{\sqrt{6}}{2}i$

旋轉 60°，伸長 2 倍　(1 分)

設點 P 對應的複數為 z_P

故 $z_P=\left(\frac{\sqrt{6}}{2}+\frac{\sqrt{6}}{2}i\right)[2(\cos60^\circ+i\sin60^\circ)]$

$=\frac{\sqrt{6}-3\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{6}+3\sqrt{2}}{2}i$　(1 分)

可知 $P\left(\frac{\sqrt{6}-3\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{6}+3\sqrt{2}}{2}\right)$，　(1 分)

又 $R=\overline{OA}\times\tan60^\circ=3$。　(1 分)