

全國公私立 112 學年度分科測驗第六次數學甲



第壹部分：選擇(填)題(占 76 分)

一、單選題(占 18 分)

- 若不等式 $|x+2|+|x-3|+|x-5|>|k+1|$ 對任意的實數 x 皆成立，則實數 k 的取值範圍為何？
 (1) $-10 < k < -8$ (2) $-8 < k < 6$ (3) $6 < k < 7$ (4) $k > 0$ (5) $k < 10$
- 設多項式 $f(x)$ 除以 $(x-1)(x-2)$ 的餘式為 $-34x+59$ ，除以 $(x-3)(x-4)(x-5)$ 的餘式為 x^2-x+1 。 $f(x)$ 除以 $(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)$ 的餘式為 $r(x)$ ，求 $r(x)$ 除以 $x-6$ 的餘式為何？ (1) 31 (2) 45 (3) 84 (4) 115 (5) 127
- 設 P 為拋物線 $y = \frac{1}{2}x^2$ 在第一象限內的任意點， O 為原點，今在 x 軸正向上取一點 Q ，使得 $\overline{OP} = \overline{OQ}$ ，連接 \overrightarrow{PQ} 交 y 軸於 R 點，若 P 點沿拋物線趨近於原點時， R 點 y 坐標的極限值為何？ (1) 0 (2) 1 (3) 2 (4) 3 (5) 4

二、多選題(占 40 分)

- 坐標平面上， $O(0,0), A(2,3), B(-1,2)$ ，且 P 點滿足 $\overrightarrow{OP} = \alpha \overrightarrow{OA} + \beta \overrightarrow{OB}$ ，其中 $0 \leq \alpha \leq 1, 0 \leq \beta \leq t$ ，若 P 點所在區域包含 $C(0,1)$ ，則下列哪些實數 t 可以滿足要求？
 (1) $\frac{1}{6}$ (2) $\frac{1}{5}$ (3) $\frac{1}{4}$ (4) $\frac{1}{3}$ (5) $\frac{1}{2}$
- 已知一正方體的三個頂點 $A(0,0,0), B(4,-4,2), C(6,0,6)$ ，試選出正確選項。
 (1) 正方體的稜長為 6 (2) $\triangle ABC$ 為等腰直角三角形 (3) 通過 A, B, C 三點的平面方程式為 $2x+y-2z=0$ (4) 若中心坐標 O 位於第一卦限，則其坐標為 $(5,1,2)$ (5) 承(4)， \overrightarrow{AO} 和 \overrightarrow{BO} 夾角的餘弦值為 $\frac{1}{3}$
- 坐標平面上 $P(a,b)$ 為 $y = \log_2 x$ 圖形上的一動點，若二階方陣 A 作用在 P 點後，得到 Q 點 (a',b') ，即 $A \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a' \\ b' \end{bmatrix}$ ，則下列哪些選項可找到某個方陣 A ，能夠將某個 P 點作用後，使得 Q 點落在 $y = 2^x$ 的圖形上？
 (1) $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ (2) $\begin{bmatrix} h & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix}, h > 0, k > 0$ (3) $\begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}$
 (4) $\begin{bmatrix} 1 & h \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, h > 0$ (5) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{bmatrix}, k > 0$
- 設數列 $\langle a_n \rangle$ 滿足 $a_1 = 2$ ，前 n 項和為 S_n ，且 $a_n = a_{n-1} + 2^{n-1}$ ；數列 $\langle b_n \rangle$ 滿足 $b_n = \frac{n \cdot a_n}{2^{n+1}}$ ，試選出正確選項。
 (1) $a_3 = 8$ (2) $a_n = 2^n$ (3) $\langle b_n \rangle$ 為等差數列
 (4) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2a_n - 5^{n-1}}{3^n + 4 \cdot 5^n} = -\frac{1}{4}$ (5) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{b_n b_{n+1}} = 4$
- 設 $0 < \theta < \frac{\pi}{4}$ ，下列哪些式子是正確的？
 (1) $\frac{\sin \theta + 1}{\cos \theta + 1} > \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$ (2) $\frac{\sin \theta}{\tan \theta} > \frac{\sin \theta - 1}{\tan \theta - 1}$
 (3) $(1 - \sin \theta)^{\sin \theta} > (1 - \cos \theta)^{\cos \theta}$ (4) $\sin \theta \cos \theta + 1 > \sin \theta + \cos \theta$
 (5) $\sin \theta + \cos \theta + \tan \theta > \sin \theta \cos \theta \tan \theta + 2$

三、選填題(占 18 分)

9. 小美和小華去冰果店吃甜品，兩人決定各點一碗，並填寫同一張菜單上(小美寫在第一碗，小華寫在第二碗)，店家有二種方案可任意選擇。

- (I) 綜合豆花，在豆花處打✓，再✓選三種配料；
 (II) 綜合冰，任意✓選四種配料，

配料	1.豆花	2.花生	3.紅豆	4.綠豆	5.薏仁	6.粉圓	7.愛玉	8.粉粿	9.芋頭	10.煉乳
第一碗										
第二碗										

若最後的菜單上恰有一行配料上有 2 個✓，則老闆看到菜單上的所有可能的情形有_____種。

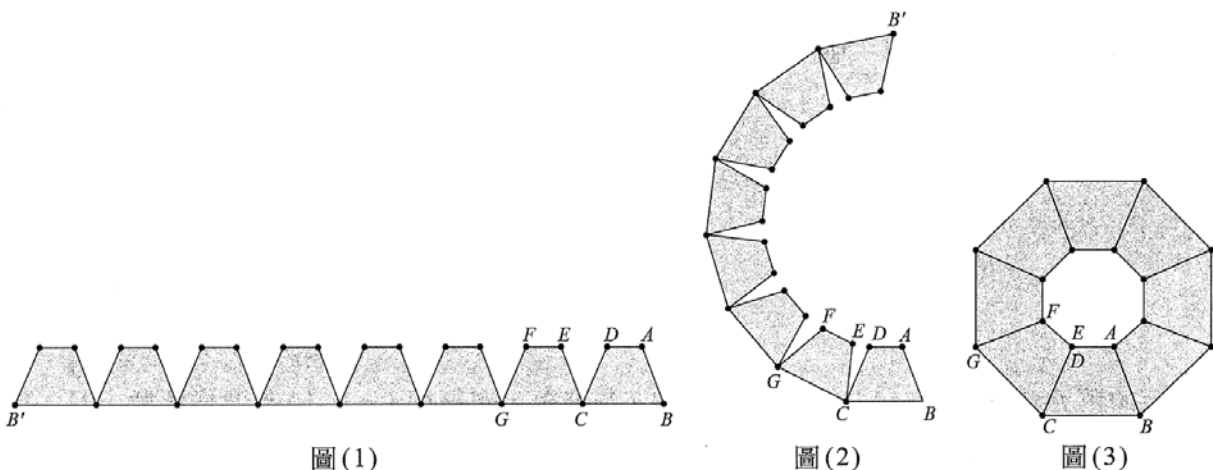
10. 若函數 $f(x) = x^2(2-x) + t(x-1)$ ，其中 t 為整數，在區間 $(-1,1)$ 為遞增函數，且 t 為整數，試求 t 的最小值為_____。

11. 有一個光源從拋物線 $y = x^2$ 上的點 P 發射一束雷射光，射向焦點 F 經對稱軸反射後，碰到拋物線上的另一點 Q ，設 $\overline{PF} = a, \overline{QF} = b$ ，求 $a + 4b$ 的最小值為_____。
 (化為最簡分數)

第貳部分：混合題或非選擇題(占 24 分)

12 至 14 題為題組

在倫敦布丁頓有一座特別的橋，它的名字叫做 rolling bridge，如圖(1)。這個橋非常特別，可以捲起來成一個正八邊形也可以打開成一般橋梁，如圖(3)。若該橋的總長度為 16(即 $\overline{BB'}$)，且 8 個四邊形皆為等腰梯形，且 $\overline{BC} = \overline{CD}$ ，若這些等腰梯形橋墩之間(例如 $\angle DCE$)每經過一秒會張開 3 度。



12. 根據上述資料，請選出正確選項？(單選題，3 分)

- (1) $\angle ABC = \frac{2\pi}{5}$ (2) $\angle ECF = \frac{3\pi}{16}$ (3) 從開始到完全張開，只需 15 秒
 (4) $\overline{AD} = 1$ (5) 從 B 點離開的橋墩點 B' 到全部張開，其移動的軌跡為圓形的一部份

13.若已知 $\sin\left(\frac{3}{8}\pi\right) = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$ ，試求 $\sin\left(\frac{3}{16}\pi\right) = ?$ (非選擇題，4分)

14. F 點從開始到完全展開，移動的軌跡長度是多少？(非選擇題，5分)

15至17題為題組

設 $z_n = \cos\frac{n\pi}{36} + i\sin\frac{n\pi}{36}$, $n \in N, i = \sqrt{-1}$ 。

15.關於 z_6 的敘述，何者正確？(單選題，3分)

(1) $z_6^6 = 1$ (2) $z_6^3 = 1$ 或 $z_6^3 = -1$ (3) $z_6^4 - z_6^2 + 1 = 0$

(4) $1 + z_6 + z_6^2 + \cdots + z_6^5 = 0$ (5) $|z_6 - 1| = 0$

16.求 $\text{Arg}\left(\frac{z_7 - z_1}{z_{31} - z_7}\right) = ?$ (非選擇題，4分)

17.複數平面上，由 z_1, z_7, z_{31} 三點所圍出的三角形面積為何？(非選擇題，5分)

參考數值： $\sqrt{2} \approx 1.414, \sqrt{3} \approx 1.732, \sqrt{5} \approx 2.236, \sqrt{6} \approx 2.449, \pi \approx 3.142$ ，

$\sin 23^\circ \approx 0.40, \sin 37^\circ \approx 0.60, \sin 53^\circ \approx 0.80, \cos 23^\circ \approx 0.92, \cos 37^\circ \approx 0.80, \cos 53^\circ \approx 0.60$

對數值： $\log 2 \approx 0.3010, \log 3 \approx 0.4771, \log 5 \approx 0.6990, \log 7 \approx 0.8451$

RA6114 全國公私立 112 學年度分科測驗第六次數學甲

參考答案

選擇題：1.(2) 2.(4) 3.(5) 4.(4)(5) 5.(1)(2)(3)(5) 6.(1)(2)(3)(5) 7.(1)(2)(3)(5) 8.(1)(3)(4)

選填題：9. 16800 10. 7 11. $\frac{9}{4}$

混合題或非選擇題：12.(3) 13. $\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2-\sqrt{2}}}$ 14. $\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2-\sqrt{2}}}\pi$

15.(3) 16. $-\frac{5}{12}\pi$ 17. $\frac{\sqrt{3}}{4}$