全國公私立高級中學 112 學年度分科測驗第六次聯合模擬考試

數學甲考科解析

考試日期：113 年 4 月 10 日

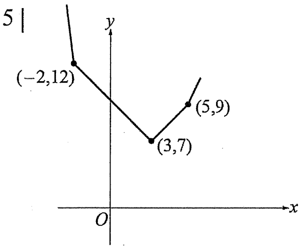
1	2	3	4	5	6	7	8	9-1	9-2	9-3	9-4	9-5	10-1	11-1
2	4	5	45	1235	1235	1235	134	1	6	8	0	0	7	9
11-2	12	13	14	15	16	17								
4	3			3										

第壹部分：選擇題

一、單選題

1. 考慮 $f(x)=|x+2|+|x-3|+|x-5|$

$$=\begin{cases}3x-6，x\geq 5\\ x+4，3<x\leq 5\\ 10-x，-2<x\leq 3\\ -3x+6，x\leq -2\end{cases}$$



由圖可知，$f(3)=7$ 為最小值，
或由三角不等式
$f(x)=|x-3|+|x+2|+|5-x|\geq|x-3|+7\geq 7$，
"$=$" 成立時，$x=3$，
所以 $|k+1|<7\Rightarrow -7<k+1<7\Rightarrow -8<k<6$，
故選(2)。

2. 設 $f(x)=(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)Q(x)+(ax+b)(x-3)(x-4)(x-5)+x^2-x+1$，

$$\begin{cases}f(1)=-34+59=-24(a+b)+1\\ f(2)=-68+59=-6(2a+b)+3\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}a+b=-1\\ 2a+b=2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=3\\ b=-4\end{cases}，$$

$r(x)=(3x-4)(x-3)(x-4)(x-5)+x^2-x+1$，
$r(6)=14\times3\times2\times1+36-6+1=115$，
故選(4)。

3. 設 $P(2t,2t^2)$，$\overline{OP}=\sqrt{4t^2+4t^4}$，$Q(2\sqrt{t^2+t^4},0)$，

令 $R(0,b)$，由 $m_{\overline{PQ}}=m_{\overline{PR}}\Rightarrow\dfrac{-2t^2}{2\sqrt{t^2+t^4}-2t}=\dfrac{2t^2-b}{2t}$

$$\Rightarrow b=\frac{2t^3}{\sqrt{t^2+t^4}-t}+2t^2=\frac{2t^2}{\sqrt{1+t^2}-1}+2t^2，$$

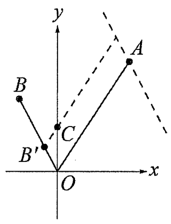
所求 $\displaystyle\lim_{t\to0}\left(\frac{2t^2}{\sqrt{1+t^2}-1}+2t^2\right)=\lim_{t\to0}\left(\frac{2t^2(\sqrt{1+t^2}+1)}{(1+t^2)-1}+2t^2\right)$

$=2(1+1)=4$，

故選(5)。

二、多選題

4. 如圖，包含 C 點的最小區域為以 $\overline{OA}$，$\overline{OB'}$ 為邊的平行四邊形，



$\overleftrightarrow{B'C}$ 的方向向量為 $(2,3)$，

且過 $C(0,1)\Rightarrow\begin{cases}x=2s\\ y=1+3s\end{cases}$，

$\overleftrightarrow{OB}$ 的方程式為 $y=-2x$

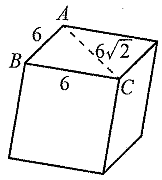
$\Rightarrow 1+3s=-4s\Rightarrow s=-\dfrac{1}{7}$，

所以 $B'(-\dfrac{2}{7},\dfrac{4}{7})$，$\overrightarrow{OB'}=\dfrac{2}{7}(-1,2)$，故 $t\geq\dfrac{2}{7}$，

故選(4)(5)。

5. (1) ○：$\overline{AB}=\sqrt{4^2+(-4)^4+2^2}=6$，
$\overline{AC}=\sqrt{6^2+6^2}=6\sqrt{2}$，
$\overline{BC}=\sqrt{2^2+(-4)^4+4^2}=6$。

(2) ○：$6^2+6^2=(6\sqrt{2})^2$，所以為等腰直角三角形。



(3) ○：$\overrightarrow{AB}=(4,-4,2)$，$\overrightarrow{AC}=(6,0,6)$，
$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=(-24,-12,24)\,/\!/\,(2,1,-2)$，
所以平面方程式 $2x+y-2z=0$。

(4) ×：先取 $\overline{AC}$ 中點 $D(3,0,3)$，再將 D 點延平面 ABC 的法向量的方向移動 3 單位，即可得到中心 O，
$(3,0,3)+(2,1,-2)=(5,1,1)$
或 $(3,0,3)-(2,1,-2)=(1,-1,5)$，
因為 O 在第一卦限 $\Rightarrow O(5,1,1)$。

(5) ○：$\overrightarrow{AO}=(5,1,1)$，
$\overrightarrow{BO}=(5-4,1-(-4),1-2)=(1,5,-1)$，

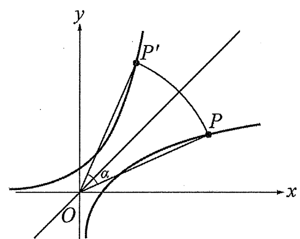
所以 $\cos\theta=\dfrac{5+5-1}{\sqrt{5^2+1^2+1^2}\sqrt{1^2+5^2+(-1)^2}}=\dfrac{9}{27}=\dfrac{1}{3}$。

故選(1)(2)(3)(5)。

6. (1) ○：$\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}b\\a\end{bmatrix}$，因為 $b=\log_2 a\Rightarrow a=2^b$，
所以 (b,a) 會在 $y=2^x$ 上。

(2) ○：例 $P(2,1)$，$A=\begin{bmatrix}1&0\\0&4\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}1&0\\0&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\4\end{bmatrix}$，
所以 $2^2=4\Rightarrow(2,4)$ 在 $y=2^x$ 上。

(3) ○：$\begin{bmatrix}\cos\alpha&-\sin\alpha\\\sin\alpha&\cos\alpha\end{bmatrix}$ 表示將 $P(a,b)$ 繞著原點旋轉 α 角，所以可符合所求。



(4) ×：$\begin{bmatrix}1&h\\0&1\end{bmatrix}$ 表示沿 x 軸正向推移 y 坐標的 h 倍，
所以無法達成。

(5) ○：例 $P(1,0)$，$A=\begin{bmatrix}1&0\\2&1\end{bmatrix}$

$\Rightarrow\begin{bmatrix}1&0\\2&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$，所以 $2^1=2$

$\Rightarrow Q(1,2)$ 在 $y=2^x$ 上。

故選(1)(2)(3)(5)。

7. (1) ○：$n=2$ 時，$a_2=a_1+2\Rightarrow a_2=4$，
$a_3=a_2+2^2\Rightarrow a_3=8$。

(2) ○：由累加法，可得

$$a_n=a_1+2+2^2+\cdots+2^{n-1}=2+\frac{2(2^{n-1}-1)}{2-1}=2^n。$$

(3) ○：$b_n=\dfrac{na_n}{2^{n+1}}=\dfrac{n\cdot 2^n}{2^{n+1}}=\dfrac{n}{2}$，$b_n-b_{n-1}=\dfrac{n}{2}-\dfrac{n-1}{2}=\dfrac{1}{2}$，
所以 $\langle b_n\rangle$ 為等差數列。

(4) ×：$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2a_n-5^{n-1}}{3^n+4\cdot 5^n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2\cdot 2^n-5^{n-1}}{3^n+4\cdot 5^n}$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2\cdot(\frac{2}{5})^n-\frac{1}{5}}{(\frac{3}{5})^n+4}=-\frac{1}{20}\text{。}$$

(5) ○：$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{b_n\,b_{n+1}}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\frac{n}{2}\times\frac{n+1}{2}}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{4}{n(n+1)}$

$$=4\left(\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\frac{1}{3\times 4}+\cdots\right)$$

$$=4\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\cdots\right)=4\text{。}$$

故選(1)(2)(3)(5)。

8. $0<\theta<\dfrac{\pi}{4}\Rightarrow 0<\sin\theta<\cos\theta<1$。

(1) ○：$\dfrac{\sin\theta+1}{\cos\theta+1}-\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$

$$=\frac{\sin\theta\cos\theta+\cos\theta-\cos\theta\sin\theta-\sin\theta}{(\cos\theta+1)\cos\theta}$$

$$=\frac{\cos\theta-\sin\theta}{(\cos\theta+1)\cos\theta}>0\text{。}$$

(2) ×：$\dfrac{\sin\theta-1}{\tan\theta-1}-\dfrac{\sin\theta}{\tan\theta}$

$$=\frac{\tan\theta(1-\sin\theta)-\sin\theta(1-\tan\theta)}{\tan\theta(1-\tan\theta)}$$

$$=\frac{\tan\theta-\sin\theta}{\tan\theta(1-\tan\theta)}>0\text{。}$$

(3) ○：$(1-\sin\theta)^{\sin\theta}>(1-\sin\theta)^{\cos\theta}>(1-\cos\theta)^{\cos\theta}$。

(4) ○：$\sin\theta\cos\theta+1-\sin\theta-\cos\theta$
$=\sin\theta(\cos\theta-1)-(\cos\theta-1)$
$=(\sin\theta-1)(\cos\theta-1)$
$=(1-\sin\theta)(1-\cos\theta)>0$。

(5) ×：由(4)知，
$2-\sin\theta-\cos\theta>1-\sin\theta\cos\theta>\tan\theta(1-\sin\theta\cos\theta)$，
所以 $2-\sin\theta-\cos\theta>\tan\theta-\tan\theta\sin\theta\cos\theta$
$\Rightarrow\sin\theta\cos\theta\tan\theta+2>\sin\theta+\cos\theta+\tan\theta$。

故選(1)(3)(4)。

三、選填題

9. ＜法一＞
從 10 個項目中，任選一個項目，有 2 個✓，
再從第一碗的那列，從 9 個項目中選 3 個✓，
第二碗從 6 個項目中，選 3 個✓。
故共有 $C_1^{10}\,C_3^9\,C_3^6=16800$。

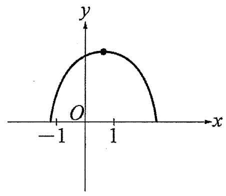
＜法二＞
(Ⅰ) 兩人皆選豆花，小美在剩餘 9 種選了 3 種，
小華從剩餘 6 種選了 3 種，共 $C_3^9\,C_3^6=1680$。

(Ⅱ) 兩人中恰一人選豆花，共 $\underbrace{C_1^2}_{\text{選一種共同配料}}\,C_1^9\,C_2^8\,C_3^6=10080$。

(Ⅲ) 兩人皆不選豆花，共 $\underbrace{C_1^9}_{\text{選一種共同配料}}\,C_3^8\,C_3^5=5040$。

故共有 1680+10080+5040=16800。

10. $f(x)=-x^3+2x^2+tx-t$，
$f'(x)=-3x^2+4x+t$ 在 $(-1,1)$ 恆正，
則頂點在 x 軸上方，略圖如右，且 $f'(1)\geq 0$，$f'(-1)\geq 0$

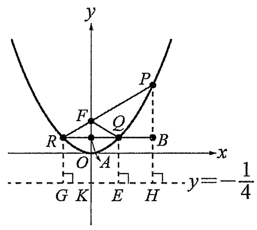


$$\Rightarrow\begin{cases}-3(\frac{2}{3})^2+4(\frac{2}{3})+t>0\\ -3+4+t\geq 0\\ -3-4+t\geq 0\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}t>-\frac{4}{3}\\ t\geq -1\\ t\geq 7\end{cases}\Rightarrow\text{取交集，}t\geq 7\text{，}$$

所以最小整數 $t=7$。

11. $y=x^2$，$c=\dfrac{1}{4}$，$F\left(0,\dfrac{1}{4}\right)$，



準線 $y=-\dfrac{1}{4}$，延長 $\overline{PF}$ 交於 R，
則 $\overline{FR}=\overline{QF}=\overline{RG}=b$，
$\overline{PF}=\overline{PH}=a$，
$\overline{FK}=2\times\dfrac{1}{4}=\dfrac{1}{2}$，

利用 $\triangle FRA\sim\triangle PRB\Rightarrow\dfrac{\overline{FA}}{\overline{PB}}=\dfrac{\overline{RF}}{\overline{RP}}$

$\Rightarrow\dfrac{\overline{FK}-b}{a-b}=\dfrac{b}{a+b}\Rightarrow\overline{FK}=\dfrac{ab+ba}{a+b}$，

所以 $\overline{FK}=\dfrac{1}{2}=\dfrac{ab+ba}{a+b}\Rightarrow a+b=4ab\Rightarrow\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}=4$，

$(a+4b)\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\right)\geq(1+2)^2$，

$a+4b\geq\dfrac{9}{4}\Rightarrow$ 最小值 $\dfrac{9}{4}$。

第貳部分、混合題或非選擇題

12. (1) ×：正八邊形的一個內角為 $\dfrac{(8-2)\times\pi}{8}$，

$\angle ABC=\dfrac{3\pi}{4}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{3}{8}\pi$。

(2) ×：因為 $\overline{BC}=\overline{CD}$，

所以 $\angle FCG=\angle DBC=\dfrac{\pi-\frac{3}{8}\pi}{2}=\dfrac{5}{16}\pi$，

$\angle ECF=\dfrac{3\pi}{8}-\dfrac{5\pi}{16}=\dfrac{1}{16}\pi$。

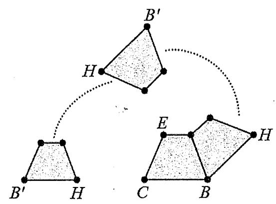
(3) ○：張開後，$\angle DCE=\pi-2\cdot\dfrac{3\pi}{8}=\dfrac{1}{4}\pi=45^\circ$，
$45\div 3=15$（秒）。

(4) ×：$\overline{BC}=\overline{CD}=16\div 8=2$，

$\angle ADB=\angle DBC=\dfrac{5\pi}{16}$（內錯角相等），

$\dfrac{\overline{AD}}{\sin\frac{\pi}{16}}=\dfrac{2}{\sin\frac{5\pi}{16}}$，顯然 $\overline{AD}\neq 1$。

(5) ×：B' 的軌跡是 H 為圓心，$\overline{BH}$ 半徑逆時針旋轉移動，
但因 H 也持續變動，故軌跡並非圓形的一部分。



故選(3)。

13. ＜法一＞

$\cos\frac{3}{8}\pi=\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{4}}=\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$ ，(2 分)

$\sin\left(\frac{3\pi}{16}\right)=\sqrt{\frac{1-\cos\frac{3}{8}\pi}{2}}=\sqrt{\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{4}}$

$=\sqrt{\frac{2-\sqrt{2-\sqrt{2}}}{4}}=\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2-\sqrt{2}}}$ 。(2 分)

＜法二＞

$\sin\left(\frac{3\pi}{16}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{5\pi}{16}\right)=\cos\frac{5\pi}{16}$ (1 分)

$=\sqrt{\frac{1+\cos\frac{5\pi}{8}}{2}}$ (1 分)

$=\sqrt{\frac{1-\sqrt{\frac{1+\cos\frac{5\pi}{4}}{2}}}{2}}=\sqrt{\frac{1-\sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}}}{2}}$

$=\frac{1}{2}\sqrt{2-2\sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}}}=\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2-\sqrt{2}}}$ 。(2 分)

14. 移動軌跡為以 C 為圓心，$\overline{CF}$ 為半徑的圓弧，

移動的角度為 $\frac{\pi}{4}$ ，(1 分)

因為$\triangle GCF$ 為等腰三角形，

所以 $\overline{CF}=2\,\overline{GC}\cos\angle GCF=2\times2\times\cos\frac{5}{16}\pi$

$=4\cdot\sin\frac{3}{16}\pi=2\sqrt{2-\sqrt{2-\sqrt{2}}}$ ，(2 分)

移動軌跡為 $2\sqrt{2-\sqrt{2-\sqrt{2}}}\cdot\frac{\pi}{4}=\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2-\sqrt{2}}}\pi$ 。(2 分)

15. (1) ×：$z_6=\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\Rightarrow z_6{}^6=\cos\pi+i\sin\pi=-1$ 。

(2) ×：$z_6{}^3=\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}=i$ 。

(3) ○：$z_6{}^4-z_2{}^2+1=\cos\frac{2}{3}\pi+i\sin\frac{2}{3}\pi-\cos\frac{\pi}{3}-i\sin\frac{\pi}{3}+1=0$

或 $z_6{}^6+1=0$ ，$(z_6{}^2+1)(z_6{}^4-z_6{}^2+1)=0$ ，

但 $z_6{}^2+1\neq0$ ，所以 $z_6{}^4-z_6{}^2+1=0$ 。

(4) ×：$1+z_6+z_6{}^2+\cdots+z_6{}^5=\frac{1-z_6{}^6}{1-z_6}=\frac{1-(-1)}{1-z_6}\neq0$ 。

(5) ×：$|z_6-1|=|\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}-1|$

$=\sqrt{\left(\cos\frac{\pi}{6}-1\right)^2+\left(\sin\frac{\pi}{6}\right)^2}$

$=\sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-1\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2}\neq0$ 。

故選(3)。

16. ＜法一＞

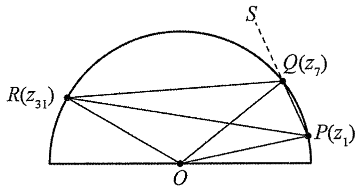
$\operatorname{Arg}(z_7-z_1)-\operatorname{Arg}(z_{31}-z_7)=-\angle RQS$ ，(1 分)

又 $\angle POQ=\frac{\pi}{6}=30°$ ，$\angle QOR=\frac{24}{36}\pi=\frac{2}{3}\pi=120°$ ，

所以 $\angle PQO+\angle OQR=\frac{180°-30°}{2}+\frac{180°-120°}{2}=105°$ ，(1 分)

所以 $\angle RQS=180°-105°=75°$

$\Rightarrow \operatorname{Arg}\left(\frac{z_7-z_1}{z_{31}-z_7}\right)=-75°=-\frac{5}{12}\pi$ 。(2 分)



＜法二＞

$\angle POR=30°+120°=150°=\overset{\frown}{PQR}$ ，(1 分)

$\angle RQP=\frac{1}{2}(360°-\overset{\frown}{PQR})=\frac{1}{2}(360°-150°)=105°$ ，(1 分)

所以 $\angle RQS=180°-105°=75°$ ，

所以 $\operatorname{Arg}\left(\frac{z_7-z_1}{z_{31}-z_7}\right)=-\frac{5}{12}\pi$ 。(2 分)

17. ＜法一＞

$\triangle PQR=\triangle OPQ+\triangle OQR-\triangle OPR$

$=\frac{1}{2}\times1^2\times\sin30°+\frac{1}{2}\times1^2\times\sin120°-\frac{1}{2}\times1^2\times\sin150°$

$=\frac{\sqrt{3}}{4}$ 。(5 分)

＜法二＞

$\overline{PQ}=\sqrt{1^2+1^2-2\times1^2\times\cos30°}=\sqrt{2-\sqrt{3}}$ ，(1 分)

$\overline{QR}=\sqrt{1^2+1^2-2\times1^2\times\cos120°}=\sqrt{3}$ ，(1 分)

所以 $\triangle PQR=\frac{1}{2}\times\sqrt{3}\times\sqrt{2-\sqrt{3}}\times\sin105°$

$=\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{4-2\sqrt{3}}}{\sqrt{2}}\times\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

$=\frac{\sqrt{3}}{2}\times(\sqrt{3}-1)\times\frac{\sqrt{3}+1}{4}$

$=\frac{\sqrt{3}}{4}$ 。(3 分)