全國公私立 112 學年度分科測驗第七次數學甲


RA6115

第壹部分：選擇(填)題(占 76 分)

一、單選題(占 18 分)

1. 規定 $i=\sqrt{-1}$ ，複數平面上相異六點 $A(z_1),B(z_2),C(z_3),D(z_4),E(z_5),F(z_6)$ ，其中 $z_2=1,z_3=-1$。以 B 點為中心，將 A 點順時鐘旋轉 90° 即為 D 點；以 C 點為中心，將 A 點逆時鐘旋轉 90° 即為 E 點。 $\overline{DE}$ 的中點為 F 點。若以 z_1 表示 z_4,z_5,z_6 ，則下列哪一個選項正確？ (1) $z_4=-iz_1+i+1,z_5=iz_1+i-1,z_6=i$ (2) $z_4=-iz_1+1,z_5=iz_1-1,z_6=0$
(3) $z_4=-iz_1+i,z_5=iz_1+i,z_6=i$ (4) $z_4=iz_1-i+1,z_5=-iz_1-i-1,z_6=-i$
(5) $z_4=iz_1+1,z_5=-iz_1-1,z_6=0$

2. 小淳老師舉辦抽獎活動，袋中有金、黑球共 30 顆，每球被取的機會均等。今每位學生抽 1 顆球，抽後放回，抽中金球者可得到巧克力。老師宣稱袋子中恰有 10 顆金球，但學生懷疑「袋子中是否恰有 10 顆金球」，因此派出 6 位學生進行實驗。設袋中恰有 10 顆金球時，這 6 位學生獲得的巧克力總數的期望值為 a，若這 6 位學生實際結果獲得的巧克力總數為 x，且 $|x-a|\le 1$，則學生就相信「袋子中恰有 10 顆金球」，若金球確實有 10 顆，請問學生做出正確判斷的機率最接近下列哪個選項？(1)71% (2)76% (3)81% (4)86% (5)91%

3. 聲音的強度(t)是用每平方公尺多少瓦特 $(\mathrm{W/m^2})$ 來衡量，且聲音強度與距離平方成反比，而分貝(s)是音量的一種單位，且兩者的關係式為 $s=10\cdot\log\dfrac{t}{10^{-12}}$ 。現在有 A、B 兩個播音器反覆播放固定的內容。A、B 依序位於坐標平面上 $(-1,0),(1,0)$ 的位置，單位為 m，當只有 A 播放時，於原點測得音量是 60 分貝。當只有 B 播放時，於原點測得音量是 80 分貝。當 A、B 兩個播音器同時播音時，怡芊拿著測量聲音強度的儀器在圓 Ω：$x^2+y^2=1.1^2=1.21$ 上移動，該儀器所測得的最小聲音強度為多少 $\mathrm{W/m^2}$ ？
(1) $\dfrac{121}{442}\times10^{-3}$ (2) $\dfrac{121}{442}\times10^{-4}$ (3) $\dfrac{121}{442}\times10^{-5}$ (4) $\dfrac{121}{442}\times10^{-6}$ (5) $\dfrac{121}{442}\times10^{-7}$

二、多選題(占 40 分)

4. *Lego* 抽抽樂是從 12 種不同的人偶包中隨機抽取且每種被抽中的機率皆為 $\dfrac{1}{12}$ ；而山羊為其中一種人偶。小淳到店裡購買該抽抽樂，每次買 1 包後立刻拆封，直到買到山羊為止。設隨機變數 X 表示直至買到山羊後停止時小淳購買的總包數，下表中
$a_k=C_k^{12}(\frac{1}{12})^k(\frac{11}{12})^{12-k},b_k=(\frac{1}{12})^k,c_k=(\frac{11}{12})^{12-k}$ ，參考下表(1)與表(2)，試選出正確的選項。

表(1)

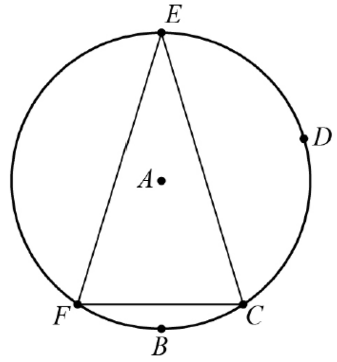
$k=$	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$a_k\approx$	0.352	0.384	0.192	0.058	0.012	0.002	0	0	0
$b_k\approx$	1	0.083	0.007	0.001	0	0	0	0	0
$c_k\approx$	1	0.917	0.840	0.770	0.706	0.647	0.593	0.544	0.499

表(2)

$k=$	9	10	11	12	13	14	15	16	17
$c_k\approx$	0.457	0.419	0.384	0.352	0.323	0.296	0.271	0.249	0.228

(1) 期望值 $E(X)=12$ (2) 變異數 $Var(X)=\dfrac{11}{12}$ (3) $P(X\ge3)\approx0.770$(三位小數近似值)
(4) $P(X\le12)\approx0.648$(三位小數近似值) (5) $P(X=5)\approx0.059$(三位小數近似值)

5. 如圖(1)，平面上有一圓 Ω，圓心為 A，半徑為 R，圓 Ω 上有 B, C, D, E, F 相異五點，$\overline{BC}=\overline{BF}=14, \overline{BE}=50,$ $2\angle CBD=2\angle DBE=\angle EBF$，試選出正確的選項。
(1) $R=40$ (2) $\overline{CE}=48$ (3) $\overline{CD}=30$
(4) $\overline{DF}=\dfrac{234}{5}$ (5) $\overline{CF}=\dfrac{336}{25}$

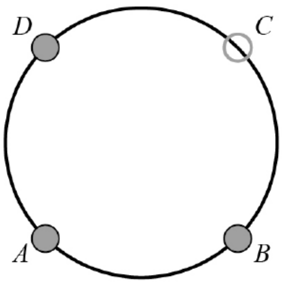


圖(1)

6. 坐標平面上，拋物線 Λ：$y^2=8x$ 上有 A, B 兩點，A 點在第一象限，B 點在第四象限，點 $E(2, 0)$在 $\overline{AB}$ 上且 $\overline{AE}=2\overline{BE}$。拋物線 Γ：$y^2=-8x$ 上有 C, D 兩點，C 點在第三象限，D 點在第二象限，點 $F(-2,0)$ 在 $\overline{CD}$ 上且 $2\overline{CF}=\overline{DF}$，試選出正確的選項。
(1) $\overline{AB}=9$ (2) $\overline{AD}=12$ (3) $\overline{BC}=2$ (4) 四邊形 $ABCD$ 的面積為 $30\sqrt{2}$
(5) △ABC 外接圓面積為 27π

7. 已知 $f(x)$ 為九次多項式，$f(0)=2$、$f(1)=5$、$f'(0)=-1$、$f'(1)=8$，試選出正確的選項。
(1) $f(x)$ 除以 $x^2(x-1)^2$ 的餘式為 $3x^3+x^2-x+2$ (2) $f(x)$ 除以 $x^2(x-1)$ 的餘式為 $4x^2-x+2$
(3) $f(x)$ 除以 $x(x-1)^2$ 的餘式為 $5x^2-2x+2$ (4) $f(x)$ 除以 x^2 的餘式為 $-x+2$
(5) $f(x)$ 除以 $x(x-1)$ 的餘式為 $3x+2$

8. 如圖(2)。開始時有一顆棋子放在 A 點，每次擲骰子後，如果是 1 點或 3 點，則沿著逆時鐘方向走到下一個點。如果是 5 點，則原地不動。如果是 2 點或 4 點或 6 點，則沿著順時鐘方向走到下一個點。當棋子走到 C 點時遊戲結束，不繼續移動。假設擲 n 次骰子後，停留在點 A, B, D 的機率依序為 a_n, b_n, d_n。因為開始時棋子放在 A 點，所以 $a_0=1, b_0=1, d_0=0$。
令 $A_n=1+\sum_{k=1}^{n}a_k, B_n=\sum_{k=1}^{n}b_k, D_n=\sum_{k=1}^{n}d_k$，已知 A_n, B_n, D_n 均為收斂級數，令 $\alpha=1+\sum_{k=1}^{\infty}a_k, \beta=\sum_{k=1}^{\infty}b_k, \gamma=\sum_{k=1}^{\infty}d_k$。



圖(2)

由題意可知對於所有的非負整數 n 均滿足 $\begin{cases} a_{n+1}=\dfrac{1}{6}a_n+\dfrac{1}{2}b_n+\dfrac{1}{3}d_n \\ b_{n+1}=\dfrac{1}{3}a_n+\dfrac{1}{6}b_n \\ d_{n+1}=\dfrac{1}{2}a_n+\dfrac{1}{6}d_n \end{cases}$
，試選出正確的選項。(1) $5\alpha=3\beta+2\gamma$ (2) $5\beta=2\alpha$ (3) $5\gamma=3\alpha$
(4) $\alpha=\dfrac{43}{30}$ (5) $\beta=\dfrac{12}{13}$

三、選填題(占 18 分)

9. 小淳想購買表(3)中的 4 種 *Lego* 產品來組建一個 *Lego* 中世紀王國。設每種至少購買 1 盒，且總花費金額必須大於 39999 元且小於 50001 元，則小淳的購買清單有________種可能性。

表(3)

產品名稱	獅子城堡	瑞文戴爾	鐵匠鋪	維京村落
每盒價格(元)	10000	10000	4000	3000

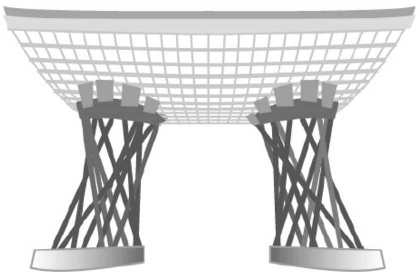
10.鉛製容器中有甲、乙、丙三種放射性物質，甲、乙的半衰期依序為 60, 30 天。第 1 天時，甲的質量等於乙、丙質量之和。第 61 天時，甲的質量仍然等於乙、丙質量之和。第 121 天時，甲的質量等於乙、丙質量之和的$\dfrac{8}{9}$倍。因此第 1 天時，甲的質量為丙的_______倍。(化為最簡分數)

11.*A*, *B* 水瓶的容量依序為 300, 400 毫升，開始時，*A* 水瓶中裝有濃度 96%的酒精 200 毫升，*B* 水瓶中裝有濃度 24%的酒精 300 毫升。每次操作為先將 *A* 水瓶的酒精倒入 *B* 水瓶直到裝滿 *B* 水瓶，然後再將 *B* 水瓶的酒精倒入 *A* 水瓶直到裝滿 *A* 水瓶。則試求 3 次操作後，*B* 水瓶中酒精的濃度為__________%。

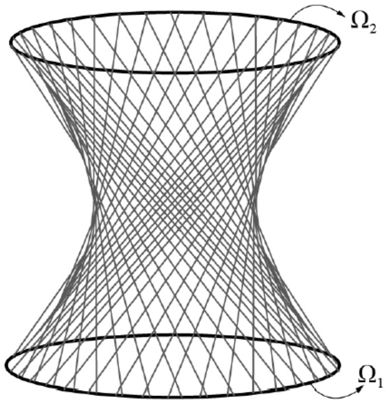
第貳部分：混合題或非選擇題(占 24 分)

12 至 14 題為題組

圖(3)為日本北陸金澤駅的公共裝置藝術：鼓門。圖(4)的日本鼓 Λ 是空間中在平面 $\Gamma_1: z=-1$ 上有一個圓心為 $A(0,0,-1)$ 且半徑為 1 的圓 Ω_1，在平面 $\Gamma_2: z=1$ 上有一個圓心為 $B(0,0,1)$ 且半徑為 1 的圓 Ω_2。將 Ω_1 上的每一個點 $C_\theta(\cos\theta,\sin\theta,-1)$ 與 Ω_2 上的對應點 $D_\theta(\cos(\theta+\frac{\pi}{2}),\sin(\theta+\frac{\pi}{2}),1)$ 連接起來，由這無數條線段 $\overline{C_\theta D_\theta}$ 與 Ω_1,Ω_2 所構成。根據上述，試回答下列問題。



圖(3)



圖(4)

12.當 $\theta=0$ 時，C_0, D_0 兩點的坐標為 $(1,0,-1)$、$(0,1,1)$，若此時直線 C_0D_0 方程式為 $\dfrac{x-a}{c}=\dfrac{y-b}{d}=z$，則數組 (a,b,c,d) 為下列哪一個選項？(單選題，4 分)

(1) $(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ (2) $(\frac{-1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ (3) $(\frac{1}{2},\frac{-1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ (4) $(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{-1}{2},\frac{1}{2})$ (5) $(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{-1}{2})$

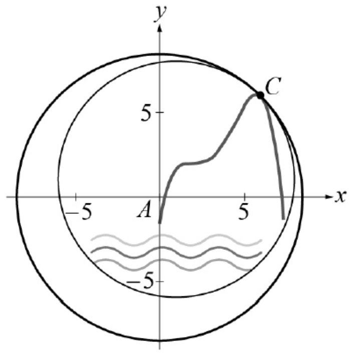
13.日本鼓 Λ 在平面 $z=t$，$-1\le t\le 1$ 的截面為一個圓，這個圓的面積為多少？(以 t 表示，非選擇題，4 分)

14.圖(4)中的日本鼓 Λ 的體積為多少？(非選擇題，4 分)

<u>15至17題為題組</u>

圖(5)為日本宇奈月溫泉開湯100週年記念logo概念圖。大圓Ω_1的圓心為$A(0,0)$，小圓Ω_2的圓心為$B(1,1)$，兩者內切於點$C(6, 6)$，如略圖(6)。根據上述，試回答下列問題。

圖(5)



圖(6)

15.右側的山為四次多項式$y = f(x)$在$0 \le x \le 7.36$的部分圖形。$y = f(x)$與圓Ω_1在點$C(6, 6)$的切線相同，$D(2, 2)$為$y = f(x)$的反曲點且該點的切線斜率為0。設a, b, c, d為實數，若$f(x) = (x-a)^3(bx-c)+d$，則數對(a, d)為下列哪一個選項？(單選題，4分)

(1) $(2, 2)$　(2) $(1, 2)$　(3) $(0, 2)$　(4) $(-1,2)$　(5) $(-2,2)$

16.承15題，若$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x^4} = g, \lim\limits_{x\to 0} f(x) = h$，則數對$(g,h) =$？(非選擇題，4分)

17.圖(6)中，下方的水波紋路是由$\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$所構成，其中$\Gamma_2, \Gamma_3$依序為$\Gamma_1$往上平移0.7, 1.4單位。$\Gamma_1$為$y = 0.3\sin[a(x+h)]+k$在$-4 \le x \le 6$的部分圖形，恰為3個完整的週期。$\Gamma_1$的兩端點為$D(-4,-4)$與$E(6,-4)$，且$y$的最大值為$-3.7$，$y$的最小值為$-4.3$。若$a > 0$且$h$為符合$\Gamma_1$圖形的最小正數，則數組$(a, h, k)$＝？(非選擇題，4分)

參考數值：$\sqrt{2} \approx 1.414, \sqrt{3} \approx 1.732, \sqrt{5} \approx 2.236, \sqrt{6} \approx 2.449, \pi \approx 3.142$，

$\sin 23^\circ \approx 0.40, \sin 37^\circ \approx 0.60, \sin 53^\circ \approx 0.80, \cos 23^\circ \approx 0.92, \cos 37^\circ \approx 0.80, \cos 53^\circ \approx 0.60$

對數值：$\log 2 \approx 0.3010, \log 3 \approx 0.4771, \log 5 \approx 0.6990, \log 7 \approx 0.8451$

RA6115　　全國公私立 112 學年度分科測驗第七次數學甲

參考答案

選擇題：1.(1)　2.(3)　3.(2)　4.(1)(4)(5)　5.(2)(3)(4)　6.(1)(3)(4)　7.(2)(3)(4)(5)　8.(2)(3)(5)

選填題：9. 47　10. $\dfrac{3}{2}$　11. 52.5%

混合題或非選擇題：12.(4)　13. $\dfrac{\pi}{2}(t^2+1)$　14. $\dfrac{4}{3}\pi$

15.(1)　16. $(g,h) = (-\dfrac{1}{16}, -\dfrac{3}{2})$　17. $(a,h,k) = (\dfrac{3}{5}\pi, \dfrac{2}{3}, -4)$