全國公私立高級中學 112 學年度分科測驗第七次聯合模擬考試

數學甲考科解析

考試日期：113 年 5 月 8 日

1	2	3	4	5	6	7	8	9-1	9-2	10-1	10-2	11-1	11-2	11-3
1	3	2	145	234	134	2345	235	4	7	3	2	5	2	5
12	13	14	15	16	17									
4			1											

第壹部分：選擇題

一、單選題

1. $z_4-1=-i(z_1-1)\Rightarrow z_4=-iz_1+i+1$，
$z_5-(-1)=i(z_1-(-1))\Rightarrow z_5=iz_1+i-1$，
$z_6=\dfrac{z_4+z_5}{2}=\dfrac{(-iz_1+i+1)+(iz_1+i-1)}{2}=i$。
故選(1)。

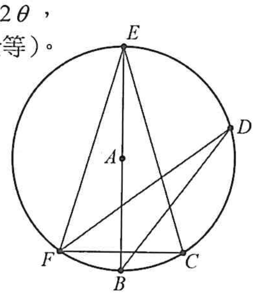
2. 因 $a=np=6\times\dfrac{10}{30}=2$，
所以 $|x-a|=|x-2|\le 1\Rightarrow x=1,2,3$。
$P(X=1)=C^6_1\times(\dfrac{1}{3})^1\times(\dfrac{2}{3})^5=\dfrac{192}{729}$。
$P(X=2)=C^6_2\times(\dfrac{1}{3})^2\times(\dfrac{2}{3})^4=\dfrac{240}{729}$。
$P(X=3)=C^6_3\times(\dfrac{1}{3})^3\times(\dfrac{2}{3})^3=\dfrac{160}{729}$。
所求為 $\dfrac{192+240+160}{729}=\dfrac{592}{729}\approx 81.2\%$。
故選(3)。

3. 令怡芊的坐標為 $P(x,y)$，$a=\overline{PA}$，$b=\overline{PB}$。
因為 $s=10\log\dfrac{t}{10^{-12}}\Rightarrow t=10^{\frac{s}{10}-12}$，
所以 60，80 分貝對應的聲音強度依序為 10^{-6}，10^{-4}，
在 P 點測得的聲音強度為 $\dfrac{10^{-6}}{a^2}+\dfrac{10^{-4}}{b^2}$。
$a^2+b^2=\overline{PA}^2+\overline{PB}^2=(x+1)^2+y^2+(x-1)^2+y^2$
$=2x^2+2y^2+2=4.42$。
由柯西不等式可知 $(a^2+b^2)(\dfrac{10^{-6}}{a^2}+\dfrac{10^{-4}}{b^2})\ge(10^{-3}+10^{-2})^2$
$\Rightarrow\dfrac{10^{-6}}{a^2}+\dfrac{10^{-4}}{b^2}\ge\dfrac{0.011^2}{4.42}=\dfrac{121}{442}\times 10^{-4}$，
等號成立時 $a^2=\dfrac{4.42}{11}$，$b^2=\dfrac{44.2}{11}$。
故選(2)。

二、多選題

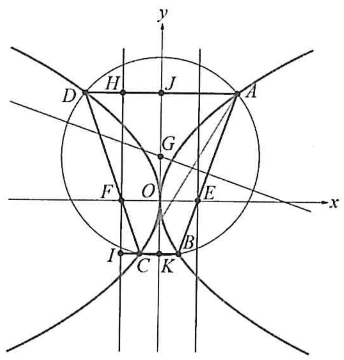
4. (1) ○：$p=\dfrac{1}{12}$，$E(X)=\dfrac{1}{p}=\dfrac{1}{\frac{1}{12}}=12$。
(2) ×：$Var(X)=\dfrac{1-p}{p^2}=\dfrac{1-\frac{1}{12}}{(\frac{1}{12})^2}=132$。
(3) ×：$P(X\ge k+1)$ 為停止時包數大於 k 的機率，
等於前 k 包都沒有中獎的機率 $=(\dfrac{11}{12})^k=c_k$。
$P(X\ge 3)=c_2\approx 0.840$。
(4) ○：因為 $P(X\le k)+P(X\ge k+1)=1$，
所以 $P(X\le k)=1-c_k$。
$P(X\le 12)=1-c_{12}\approx 1-0.352=0.648$。
(5) ○：$P(X=5)=P(X\ge 5)-P(X\ge 6)$
$=c_4-c_5\approx 0.706-0.647=0.059$。
故選(1)(4)(5)。

5. (1) ×：如圖，令 $\angle CBD=\theta$。因此 $\angle DBE=\theta$，$\angle EBF=2\theta$。
$\triangle BCE$ 與 $\triangle BEF$ 中，因為 $\overline{BC}=\overline{BF}=14$，
共用 $\overline{BE}$，$\angle EBC=\angle EBF=2\theta$，
所以 $\triangle BEC\cong\triangle BEF$（$SAS$ 全等）。
因為 $\angle BCE=\angle BFE$
且 $\angle BCE+\angle BFE=180°$，
所以 $\angle BCE=\angle BFE=90°$，
$\overline{BE}=50$ 為直徑，
因此半徑 $R=25$。



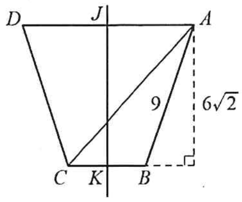
(2) ○：$\triangle BCE$ 為直角三角形，
因此 $\overline{CE}=\sqrt{50^2-14^2}=48$。
(3) ○：$\cos\angle EBF=\cos 2\theta=\dfrac{7}{25}$，$\sin\theta=\sqrt{\dfrac{1-\cos 2\theta}{2}}=\dfrac{3}{5}$。
由正弦定理知 $\overline{CD}=2R\sin\theta=50\times\dfrac{3}{5}=30$。
(4) ○：$\sin\angle DBF=\sin 3\theta=\sin(\theta+2\theta)$
$=\sin\theta\cos 2\theta+\cos\theta\sin 2\theta$
$=\dfrac{3}{5}\times\dfrac{7}{25}+\dfrac{4}{5}\times\dfrac{24}{25}=\dfrac{117}{125}$，
由正弦定理可知 $\overline{DF}=2R\sin 3\theta=50\times\dfrac{117}{125}=\dfrac{234}{5}$。
(5) ×：$\overline{CF}=2\overline{BC}\sin 2\theta=2\times 14\times\dfrac{24}{25}=\dfrac{672}{25}$。
故選(2)(3)(4)。

6. 如圖，拋物線 $\Lambda: y^2=8x$ 的準線為 $L_1: x=-2$。
焦點為 $E(2,0)$，梯形 $ABIH$ 中，
令 $\overline{BI}=\overline{BE}=\ell$，$\overline{AH}=\overline{AE}=2\ell$。
因為 $\overline{AE}:\overline{BE}=2:1$，所以 $\overline{EF}=\dfrac{1\times\overline{AH}+2\times\overline{BI}}{1+2}$
$\Rightarrow 4=\dfrac{2\ell+2\ell}{3}\Rightarrow\ell=3$。



(1) ○：$\overline{AB}=3\ell=9$。
(2) ×：$\overline{AH}=2\ell=6$，$\overline{AJ}=6-2=4$，$\overline{AD}=4\times 2=8$。
(3) ○：$\overline{BI}=\ell=3$，$\overline{BK}=3-2=1$，$\overline{BC}=1\times 2=2$。
(4) ○：$\overline{JK}=\sqrt{\overline{AB}^2-(\overline{AJ}-\overline{BK})^2}=\sqrt{9^2-3^2}=6\sqrt{2}$，
梯形 $ABCD$ 的面積為 $\dfrac{8+2}{2}\times 6\sqrt{2}=30\sqrt{2}$。

(5) ×：因為 $\overline{AB}=9$，$\overline{JK}=6\sqrt{2}$



$\Rightarrow \sin\angle ABC=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

$\Rightarrow \cos\angle ABC=-\dfrac{1}{3}$，

所以 $\overline{AC}=\sqrt{2^2+9^2-2\cdot 9\cdot 2\cdot(-\dfrac{1}{3})}=\sqrt{97}$，

利用正弦定理知 $2R=\dfrac{\sqrt{97}}{\frac{2\sqrt{2}}{3}}$

$\Rightarrow R=\dfrac{3\sqrt{97}}{4\sqrt{2}}\Rightarrow$ 所求 $=\dfrac{873}{32}\pi$。

7. (1) ×：令 $f(x)=x^2(x-1)^2g(x)+h(x)$，

其中 $h(x)=ax^3+bx^2+cx+d$，$h'(x)=3ax^2+2bx+c$。

$$\begin{cases} 2=f(0)=h(0)=d \\ 5=f(1)=h(1)=a+b+c+d \\ -1=f'(0)=h'(0)=c \\ 8=f'(1)=h'(1)=3a+2b+c \end{cases}$$

$\Rightarrow(a,b,c,d)=(1,3,-1,2)$，

因此 $f(x)$ 除以 $(x-1)^2(x-2)^2$ 的餘式為

x^3+3x^2-x+2。

(2) ○：因為 $x^2(x-1)=x^3-x^2$，

所以 $x^3+3x^2-x+2=(x^3-x^2)+4x^2-x+2$

$\Rightarrow h(x)$ 除以 $x^2(x-1)$ 的餘式為 $4x^2-x+2$

$\Rightarrow f(x)$ 除以 $x^2(x-1)$ 的餘式為 $4x^2-x+2$。

(3) ○：因為 $x(x-1)^2=x^3-2x^2+x$，

所以 $x^3+3x^2-x+2=(x^3-2x^2+x)+5x^2-2x+2$

$\Rightarrow h(x)$ 除以 $x(x-1)^2$ 的餘式為 $5x^2-2x+2$

$\Rightarrow f(x)$ 除以 $x(x-1)^2$ 的餘式為 $5x^2-2x+2$。

(4) ○：承選項(2)，該選項的餘式為 $4x^2-x+2$，

而 $4x^2-x+2$ 除以 x^2 的餘式 $-x+2$，

與 $f(x)$ 除以 x^2 的餘式相同。

＜另解＞

由泰勒展開式可知 $f(x)$ 除以 x^2 的餘式為

$\dfrac{f'(0)}{1!}x+f(0)=-x+2$。

(5) ○：承選項(2)，該選項的餘式為 $4x^2-x+2$，

因為 $x(x-1)=x^2-x$

且 $4x^2-x+2=4(x^2-x)+3x+2$，

所以 $4x^2-x+2$ 除以 $x(x-1)$ 的餘式 $3x+2$，

與 $f(x)$ 除以 $x(x-1)$ 的餘式相同。

故選(2)(3)(4)(5)。

8. (1) ×：$a_1+a_2+\cdots$

$=\dfrac{1}{6}(a_0+a_1+\cdots)+\dfrac{1}{2}(b_0+b_1+\cdots)+\dfrac{1}{3}(d_0+d_1+\cdots)$

$\Rightarrow \alpha-1=\dfrac{1}{6}\alpha+\dfrac{1}{2}\beta+\dfrac{1}{3}\gamma\Rightarrow 5\alpha=3\beta+2\gamma+6$。

(2) ○：$b_1+b_2+\cdots=\dfrac{1}{3}(a_0+a_1+\cdots)+\dfrac{1}{6}(b_0+b_1+\cdots)$

$\Rightarrow \beta=\dfrac{1}{3}\alpha+\dfrac{1}{6}\beta\Rightarrow 5\beta=2\alpha$。

(3) ○：$d_1+d_2+\cdots=\dfrac{1}{2}(a_0+a_1+\cdots)+\dfrac{1}{6}(d_0+d_1+\cdots)$

$\Rightarrow \gamma=\dfrac{1}{2}\alpha+\dfrac{1}{6}\gamma\Rightarrow 5\gamma=3\alpha$。

(4) ×：$5\alpha=3\beta+2\gamma+6=3\times\dfrac{2}{5}\alpha+2\times\dfrac{3}{5}\alpha+6$

$\Rightarrow \dfrac{13}{5}\alpha=6\Rightarrow \alpha=\dfrac{30}{13}$。

(5) ○：$\beta=\dfrac{2}{5}\alpha=\dfrac{2}{5}\times\dfrac{30}{13}=\dfrac{12}{13}$。

故選(2)(3)(5)。

三、選填題

9. 每種先買一盒，花費 27000 元，剩下 13000~23000 元，
加買方法如下，合計 47 種。

獅子城堡瑞文戴爾	2	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0
鐵匠鋪	0	3	2	1	0	5	4	3	2	1	0
維京村落	0~1	0	0~1	0~3	1~4	0~1	0~2	1~3	2~5	3~6	5~7
買法	6	2	4	8	8	2	3	3	4	4	3

10. 以第 1 天時甲的質量為基準量 1，第 1 天時，
令此時乙的質量為 a，則丙的質量為 $1-a$。

	第 1 天	第 61 天	第 121 天
甲	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$
乙	a	$\frac{a}{4}$	$\frac{a}{16}$
丙	$1-a$	$\frac{1}{2}-\frac{a}{4}$	$\frac{1}{4}\times\frac{9}{8}-\frac{a}{16}$

因為 $1-a$、$\dfrac{1}{2}-\dfrac{a}{4}$、$\dfrac{9}{32}-\dfrac{a}{16}$ 成等比數列，

所以 $(1-a)(\dfrac{9}{32}-\dfrac{a}{16})=(\dfrac{1}{2}-\dfrac{a}{4})^2$

$\Rightarrow(1-a)(9-2a)=2(2-a)^2$

$\Rightarrow 2a^2-11a+9=2a^2-8a+8\Rightarrow a=\dfrac{1}{3}$。

因此丙在第 1 天的質量為 $\dfrac{2}{3}$，

故第一天時，甲的質量為丙的 $\dfrac{3}{2}$ 倍。

11. 第 1 輪操作時，先將 A 水瓶的酒精倒 100 毫升到 B 水瓶，

此時 B 水瓶的酒精濃度為 $96\%\times\dfrac{1}{4}+24\%\times\dfrac{3}{4}=42\%$。

然後再將 B 水瓶的酒精倒 200 毫升到 A 水瓶，

此時 A 水瓶的酒精濃度為 $96\%\times\dfrac{1}{3}+42\%\times\dfrac{2}{3}=60\%$。

第 n 輪後 A , B 水瓶依序有 300 , 200 毫升的酒精，

若令 A , B 水瓶的酒精濃度依序為 a_n , b_n，$n\in N$，

因之後每次操作皆為從 A 水瓶的酒精倒 200 毫升到 B 水瓶，

此時 B 水瓶的酒精濃度為 $\dfrac{a_n+b_n}{2}=b_{n+1}$，

再從 B 水瓶的酒精倒 200 毫升到 A 水瓶，

所以此時 A 水瓶的酒精濃度為

$a_n\times\dfrac{1}{3}+\dfrac{a_n+b_n}{2}\times\dfrac{2}{3}=\dfrac{2a_n+b_n}{3}=a_{n+1}$。

令矩陣 $T=\begin{bmatrix}\frac{2}{3} & \frac{1}{3}\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}a_{n+1}\\ b_{n+1}\end{bmatrix}=T\begin{bmatrix}a_n\\ b_n\end{bmatrix}$，$n\in N$

且 $\begin{bmatrix}a_1\\ b_1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}60\%\\ 42\%\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}\frac{2}{3} & \frac{1}{3}\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}60\%\\ 42\%\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}54\%\\ 51\%\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_2\\ b_2\end{bmatrix}$

$\Rightarrow\begin{bmatrix}\frac{2}{3} & \frac{1}{3}\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}54\%\\ 51\%\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}53\%\\ 52.5\%\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_3\\ b_3\end{bmatrix}$，

故 $b_3=52.5\%$。

第貳部分、混合題或非選擇題

12. 因為 $\overrightarrow{C_0D_0}=(-1,1,2)=2(\frac{-1}{2},\frac{1}{2},1)$，

所以 $(c,d)=(\frac{-1}{2},\frac{1}{2})$。

因為點 $E(a,b,0)$ 在直線 C_0D_0 上，

因此 $\overrightarrow{C_0E}$ 平行 $\overrightarrow{C_0D_0}\Rightarrow \frac{a-1}{-1}=\frac{b}{1}=\frac{1}{2}\Rightarrow a=\frac{1}{2}$ 且 $b=\frac{1}{2}$

$\Rightarrow(a,b,c,d)=(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{-1}{2},\frac{1}{2})$。

故選(4)。

13. 直線 AB 與平面 $z=t$ 的交點為 $F(0,0,t)$，此為截面的圓心。

又直線 C_0D_0：$\frac{x-\frac{1}{2}}{\frac{-1}{2}}=\frac{y-\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}=z$

與平面 $z=t$ 的交點為 $G(\frac{-t+1}{2},\frac{t+1}{2},t)$，(2 分)

所以圓半徑 $\overline{FG}=\sqrt{(\frac{-t+1}{2})^2+(\frac{t+1}{2})^2}=\sqrt{\frac{t^2+1}{2}}$

$\Rightarrow$ 圓面積為 $\frac{\pi}{2}(t^2+1)$。(2 分)

14. Λ 的體積為

$\int_{-1}^{1}\frac{\pi}{2}(t^2+1)\,dt$ (2 分)

$=2\int_0^1\frac{\pi}{2}(t^2+1)\,dt=\pi(\frac{1}{3}t^3+t)\Big|_0^1$

$=\frac{4}{3}\pi$。(2 分)

15. 因 $f(2)=2$，$f'(2)=0$，$f''(2)=0$，

設 $f(x)=k(x-2)^4+\ell(x-2)^3+0(x-2)^2+0(x-2)^2+2$

（泰勒展開式）

$\Rightarrow f(x)=(x-2)^3(kx-2k+\ell)+2$

$\Rightarrow(a,d)=(2,2)$，

故選(1)。

16. 因 $f(2)=2$，$f'(2)=0$，$f''(2)=0$，

設 $f(x)=k(x-2)^4+\ell(x-2)^3+0(x-2)^2+0(x-2)+2$

（泰勒展開式）

$\Rightarrow f'(x)=4k(x-2)^3+3\ell(x-2)^2$，

又因 $f(6)=6$，$f'(6)=-1$，

所以 $\begin{cases}256k+64\ell=4\\256k+48\ell=-1\end{cases}\Rightarrow k=-\frac{1}{16}$，$\ell=\frac{5}{16}$ (2 分)

$\Rightarrow f(x)=-\frac{1}{16}(x-2)^4+\frac{5}{16}(x-2)^3+2$

$=(x-2)^3(-\frac{1}{16}x+\frac{7}{16})+2$，

$g=f(x)$ 的 4 次項係數 $=-\frac{1}{16}$，(1 分)

$h=f(0)=(-8)\cdot\frac{7}{16}+2=-\frac{3}{2}$。(1 分)

$\Rightarrow(g,h)=(-\frac{1}{16},-\frac{3}{2})$。

17. $k=\frac{(-3.7)+(-4.3)}{2}=-4$，(1 分)

週期為 $\frac{6-(-4)}{3}=\frac{10}{3}$，且 $a>0$，

因此 $\frac{10}{3}=\frac{2\pi}{a}\Rightarrow a=\frac{3\pi}{5}$，(1 分)

從題目敘述、上述運算可知，

因 $(-4,-4)$ 在 $y=0.3\sin[\frac{3\pi}{5}(x+h)]$

$\Rightarrow 0.3\sin[\frac{3\pi}{5}(-4+h)]-4=-4$

$\Rightarrow\frac{3\pi}{5}(-4+h)=n\pi$，$n\in Z$

$\Rightarrow h=\frac{5n}{3}+4$，$n\in Z$

當 $n=-2$ 時，h 有最小值為 $\frac{2}{3}$ (2 分)

$\Rightarrow(a,h,k)=(\frac{3}{5}\pi,\frac{2}{3},-4)$。