臺北區 112 學年度分科測驗模擬考 數學甲(112-B2)

RA6116

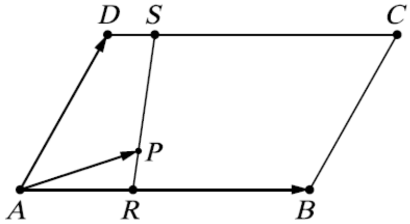
第壹部分：選擇(填)題(占 76 分)

一、單選題(占 18 分)

1. 若實數 $a>0$ 且 $a\neq 1$，則 x 的方程式 $\log_a|x-4a|+\log_a x=2$ 有幾個相異實數解？
   (1) 1 個　(2) 2 個　(3) 3 個　(4) 4 個　(5) 不同的 a 可能有不同的個數
2. 已知多項式函數 $f(x)$ 、 $g(x)$ ，滿足條件 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)+g(x)}{x}=7$ 與 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{g(x)+2}{x\cdot f(x)}=3$ 。令函數 $h(x)=f(x)\cdot g(x)$ ，則 $h'(0)$ 的值等於下列哪一個選項？
   (1) 2　(2) 4　(3) 6　(4) 8　(5) 10
3. 百貨公司舉辦週年慶抽球送獎品活動，規則如下：主辦單位準備內有 3 顆紅球，27 顆白球的不透明箱。每位顧客隨機同時抽取三球(每顆球被抽到的機率相等，取出後放回)。若抽出的三球中包含兩顆紅球或三顆紅球，即可獲得獎品，其他情況則沒有獎品。將每位顧客抽球是否得到獎品，視為一次伯努力試驗。設整個活動第一個得到獎品的顧客是第 X 位抽籤的顧客，並以 $E(X)$表示隨機變數 X 的期望值，則 $E(X)$值最接近下列哪一個選項？
   (1) 35　(2) 50　(3) 75　(4) 100　(5) 145

二、多選題(占 40 分)

4. 在複數平面上，設 $\overline{z}$ 代表複數 z 的共軛複數，且 $i=\sqrt{-1}$ 。已知 A、B、C、D 分別表示坐標為複數 α 、 $-\alpha$ 、 $\dfrac{1}{\alpha}$ 、 $\overline{\alpha}$ 的點，且點 A 在第一象限。試選出正確的選項。
   (1) 點 D 在第四象限　(2) 點 D 在△ABC 外部　(3) △ABD 為直角三角形
   (4) △ABC 面積的最大值為 1　(5) 若 α 滿足 $\alpha=i\overline{\alpha}$ ，則 $|\alpha|=1$
5. 設 $F(x)$、$G(x)$皆為實係數多項式函數且 $F'(x)=f(x)$ 、 $G'(x)=g(x)$ 。已知非常數的兩個函數 $f'(x)$ 、 $g'(x)$ ，對所有實數 x， $f'(x)>0>g'(x)$ 均成立。令函數 $h(x)=f(x)-g(x)$ 、 $H(x)=F(x)-G(x)$ 。試選出正確的選項。　(1) $f(x)$ 的次數為奇數　(2) $h(x)$ 為遞增函數
   (3) $h(x)$ 有極大值或極小值　(4) $H(x)$ 有反曲點　(5) $H(x)$ 有極大值或極小值
6. 已知平面上兩點 $A(1, 2)$、$B(4, 5)$與直線 L，其中點 A、B 不在直線 L 上且點 A 到直線 L 的距離是點 B 到直線 L 距離的 2 倍(即 $d(A,L)=2\cdot d(B,L)\neq 0$)。試選出正確的選項。
   (1) 若點 P 在直線 $\overleftrightarrow{AB}$ 上且 $\overline{PA}:\overline{PB}=2:1$ ，則點 P 坐標為(3, 4) (2)直線 L 可能與 $\overleftrightarrow{AB}$ 垂直
   (3) 直線 L 可能與 $\overleftrightarrow{AB}$ 平行　(4) 直線 L 必通過點(7, 8)
   (5) 若直線 L 通過點(2024, 2023)，則滿足題目條件的 L 有兩條
7. 右圖中，平面上點 P 在平行四邊形 $ABCD$ 內部且滿足 $\overrightarrow{AP}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{4}\overrightarrow{AD}$ 。若直線 L 過 P 點分別與邊 $\overline{AB}$ 、 $\overline{CD}$ 相交於點 R、S(交點可以是平行四邊形的頂點)，令 $\overrightarrow{AR}=r\overrightarrow{AB}$ 、 $\overrightarrow{DS}=s\overrightarrow{AB}$ ，其中 $0\le r$、$s\le 1$ 。



   試選出正確的選項。　(1) $\overline{PR}=3\overline{PS}$　(2) r 的最小值為 $\dfrac{1}{3}$
   (3) r 的最大值為 $\dfrac{4}{9}$　(4) r 的最大值與最小值相差 $\dfrac{1}{3}$　(5) $3\overrightarrow{AR}+\overrightarrow{DS}=\dfrac{4}{3}\overrightarrow{AB}$

8. 設實係數三次多項式函數 Γ： $f(x)=ax^3+px$ 。已知直線 $L: y=g(x)$ 和 $y=f(x)$ 的圖形在 $x=5$ 相切。試選出正確的選項。 (1) Γ 圖形的對稱中心為(0, 0)

(2) $f(5)=g(5)$ 且 $f'(5)=g'(5)$ (3) 可能存在實數 $k\neq 5$ 使得 $f'(k)=g'(k)$

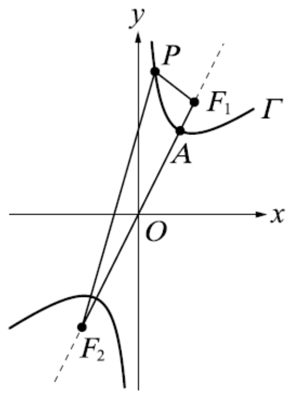
(4) 直線 $M_1: y=mx$ (其中 m 為任意實數)與 Γ 兩圖形有 3 個相異交點

(5) 若直線 M_2 過點 $(5, f(5))$ 且與 L 相異，則 M_2 與 Γ 兩圖形有 3 個相異交點

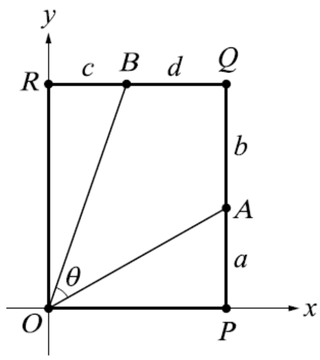
三、選填題(占 18 分)

9. 已知四次實係數方程式 $(x-2)(x+2)(x^2+2)+k=0$ 有四個相異實根，若 4 個根依大小順序排列後，恰為等差數列，則實數 k 之值為__________。(化為最簡分數)

10.坐標平面上，設 $\Gamma: 3x^2-4xy+100=0$ 為中心在原點，以 F_1 、 F_2 為焦點的雙曲線，其中 $\overline{F_1F_2}=10\sqrt{5}$ ， F_1 在第一象限，且點 $A(2\sqrt{5},4\sqrt{5})$ 為 Γ 上離原點最近的兩點之一，參考示意圖如右。若點 P 為 Γ 在第一象限上一點，滿足 $\cos\angle F_1PF_2=\dfrac{3}{5}$ ，則 $\overline{PF_1}=$________ 。



11.在右圖中，平面上長方形 $OPQR$，其中頂點 O 為原點、點 P 在 x 軸正向、點 Q 在第一象限、點 R 在 y 軸正向。已知點 A 在 $\overline{PQ}$ 邊上，令 $\overline{PA}=a$ 、 $\overline{AQ}=b$ ；點 B 在 $\overline{RQ}$ 邊上，令 $\overline{RB}=c$ 、 $\overline{BQ}=d$ ，其中 a、b、c、d 皆為正實數。以 O 為中心將點 A 逆時針旋轉銳角 θ 後，再以 O 為中心放大 $\sqrt{5}$ 倍後得到點 B，其中 $\cos\theta=\dfrac{2}{\sqrt{5}}$ 。若矩陣乘積 $M\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix}$ ，則二階方陣 M=_____________ 。



第貳部分：混合題或非選擇題(占 24 分)

<u>12-14 題為題組</u>

坐標空間中，已知三點坐標 $O(0,0,0)$ 、 $A(1,2,-1)$ 、 $B(2,-1,1)$ 。假設 C 為空間中一點，且滿足 $\overrightarrow{OC}=a\overrightarrow{OA}+b\overrightarrow{OB}+k(\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB})$ ，其中 a、b、k 為非零實數。根據上述，試分別回答下列問題。

12.若 $\dfrac{\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}}{\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}}=\dfrac{9}{16}$ ，則 $\dfrac{a}{b}=$__________。(化為最簡分數) (選填題，4 分)

13.若$\angle AOC=\angle BOC=\angle AOB$且$\overline{OC}=5\sqrt{6}$，則點$C$坐標為何？ (非選擇題，4 分)

14.令E為通過三點O、A、B的平面，若點P在平面E上且異於點A，且滿足$\angle POB=\angle AOB$、$\overline{OP}=\sqrt{6}$，則平面E方程式與點P坐標為何？ (非選擇題，4 分)

<u>15-17題為題組</u>

已知實數$k\ge 0$，直線L、M分別為二次函數$\mathit{\Gamma}_1: f(x)=(x-k)^2+1$，$\mathit{\Gamma}_2: g(x)=-(x+k)^2-1$的切線，且切點分別為$A(a,f(a))$、$B(b,g(b))$。根據上述，試分別回答下列問題。

15.當兩切線平行(L//M)時，a＋b之值為何？ (非選擇題，3分)

16.當兩切線重合(L＝M)時，稱此切線為兩個二次函數圖形的公切線。對任意實數$k\ge 0$，說明兩圖形的公切線有兩條，並求出切線斜率 (以k表示，不用寫出切線方程式)。
(非選擇題，4分)

17.承16.，試求$y=f(x)$圖形下方與兩公切線所圍有界區域面積的值(以k表示)。
(非選擇題，5分)

參考數值：$\sqrt{2}\approx 1.414,\sqrt{3}\approx 1.732,\sqrt{5}\approx 2.236,\sqrt{6}\approx 2.449,\pi\approx 3.142$，

對數值：$\log 2\approx 0.3010,\log 3\approx 0.4771,\log 5\approx 0.6990,\log 7\approx 0.8451$

RA6116　　臺北區 112 學年度分科測驗模擬考 數學甲(112-B2)

參考答案

選擇題：1.(3)　2.(5)　3.(2)　4.(1)(3)(4)　5.(1)(2)(5)　6.(2)(5)　7.(3)(4)(5)　8.(1)(2)(3)

選填題：9. $\frac{209}{25}$　10. 5　11. $\begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$

混合題或非選擇題：12. $\frac{2}{3}$　13. $(-1,-7,-10)$ 或 $(-5,5,10)$

14. $E: x-3y-5z=0, P(-\frac{5}{3},-\frac{5}{3},\frac{2}{3})$

15. 0　16. $\pm 2\sqrt{k^2+1}-2k$　17. $\frac{2}{3}(k^2+1)^{\frac{3}{2}}$