數學甲考科詳解

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.
(3)	(5)	(2)	(1)(3)(4)	(1)(2)(5)	(2)(5)	(3)(4)(5)
8.						
(1)(2)(3)						

第壹部分、選擇（填）題

一、單選題

1. ⑶

出處：第三冊〈指數與對數函數〉

目標：對數結合絕對值方程式、二次方程式求解

解析：方程式可化簡為 $\log_a x|x-4a|=2=\log_a a^2$，

即 $x|x-4a|=a^2$

根據對數定義 $x>0$ 且 $x\neq 4a$，分段討論如下：

① $0<x<4a$：$x(4a-x)=a^2$

$\Rightarrow x^2-4ax+4a^2=3a^2$

$\Rightarrow x=(2\pm\sqrt{3})a$

② $x>4a$：$x(x-4a)=a^2$

$\Rightarrow x^2-4ax+4a^2=5a^2$

$\Rightarrow x=(2\pm\sqrt{5})a$

其中 $(2-\sqrt{5})a<0$ 不合，所以共有 3 個相異實數解

故選⑶。

2. ⑸

出處：選修數學甲(上)〈極限與函數〉、

選修數學甲(上)〈微分〉

目標：多項式分式極限、函數乘積微分的計算

解析：假設 $f(x)$、$g(x)$ 的最後兩項分別為 a_1x+a_0、b_1x+b_0，

根據題意可得

$$\begin{cases} a_0+b_0=0 \\ a_1+b_1=7 \\ b_0+2=0 \\ \dfrac{b_1}{a_0}=3 \end{cases} \Rightarrow a_1=1，a_0=2，b_1=6，b_0=-2$$

因為 $h'(x)=f'(x)\,g(x)+f(x)\,g'(x)$

所以 $h'(0)=f'(0)\,g(0)+f(0)\,g'(0)$

$=a_1b_0+a_0b_1$

$=-2+12=10$

故選⑸。

3. ⑵

出處：第二冊〈排列組合與機率〉、

選修數學甲(下)〈機率統計〉

目標：排列組合求機率值、幾何分布期望值觀念

解析：取得三顆紅球或兩顆紅球一顆白球的機率為

$$p=\frac{C^3_3+C^3_2C^{27}_1}{C^{3+27}_3}$$

$$=\frac{1+81}{4060}=\frac{41}{2030}$$

所以幾何分布 $G(p)$ 的期望值

$E(X)=\dfrac{1}{p}=\dfrac{2030}{41}\approx 49.5$，最接近 50

故選⑵。

二、多選題

4. ⑴⑶⑷

出處：選修數學甲(下)〈複數與多項式方程式〉

目標：複數的共軛、倒數、原點對稱的幾何意義與運算

解析：設 O 為原點，令 $\alpha=a+bi$，其中 a、b 為正實數

則 $-\alpha=-a-bi$、$\overline{\alpha}=a-bi$、

$\dfrac{1}{\alpha}=\dfrac{\overline{\alpha}}{|\alpha|^2}=\dfrac{a-bi}{a^2+b^2}$，原點是 $\overline{AB}$ 的中點

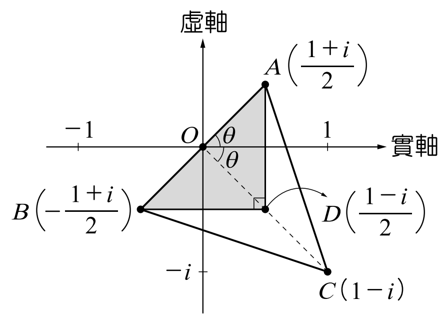
⑴ ○：因為 D 的實部 $a>0$、虛部 $-b<0$

⑵ ╳：當 $|\alpha|=\sqrt{a^2+b^2}<1$ 時，

因為 $\overline{\alpha}=(a^2+b^2)\dfrac{1}{\alpha}$，

所以 $\overline{\alpha}$ 在原點與 C 之間，即在△ABC 內部，

例如當 $a=b=\dfrac{1}{2}$ 時，可參考下圖



⑶ ○：因為 $\overline{AD}$ 垂直實軸，$\overline{BD}$ 垂直虛軸，

所以△ABD 為直角三角形

⑷ ○：△ABC 面積＝2×△OCA 面積

$=|\alpha|\cdot\dfrac{1}{|\alpha|}\cdot\sin 2\theta=\sin 2\theta\leq 1$

其中 θ 為 α 的主輻角

當 $\theta=45^\circ$，即 $a=b$ 時，等號成立，此時△ABC 的面積為最大值 1

⑸ ╳：反例：$a=b=1$，$1+i=i(1-i)$，

但 $|1+i|=\sqrt{2}\neq 1$

故選⑴⑶⑷。

5. ⑴⑵⑸

出處：選修數學甲(上)〈微分〉、

選修數學甲(下)〈複數與多項式方程式〉

目標：函數運用微分判斷遞增、反曲點、極值的性質應用、

奇數次方實係數方程式至少有一實根

解析：⑴ ○：若 $\deg f'(x)$ 為奇數，則存在實數 α 使得 $f'(\alpha)=0$，與 $f'(x)$ 恆正矛盾，又 $f'(x)$ 非常數函數，所以 $\deg f'(x)$ 為正偶數，即 $\deg f(x)$ 為正奇數且 $\deg f(x)\geq 3$、$f(x)$ 的首項係數為正

⑵ ○：因為 $h'(x)=f'(x)-g'(x)>0$

⑶ ╳：$h'(x)$ 恆正代表沒有水平切線，即沒有極值

⑷ ╳：因為 $H''(x)=h'(x)=f'(x)-g'(x)>0$，

所以 $H(x)$ 沒有反曲點

⑸ ○：由選項⑴可推導 $f(x)$、$g(x)$ 為首項係數一正一負的奇數次多項式函數，所以

$\deg H'(x)=\deg h(x)$ 為正奇數，方程式 $H'(x)=0$ 必有實根，且 $H''(x)>0$，所以 $H(x)$ 有極值

故選⑴⑵⑸。

6. ⑵⑸

出處：第一冊〈直線與圓〉、第三冊〈平面向量〉

目標：點到直線距離性質運用、平面分點公式

解析：⑴ ╳：當 $P\in\overline{AB}$ 時，

$$\overrightarrow{OP}=\frac{1}{3}\overrightarrow{OA}+\frac{2}{3}\overrightarrow{OB}=\frac{1}{3}((1,2)+(8,10))$$
$$=(3,4)$$

當 $P\notin\overline{AB}$，此時 B 為 $\overline{AP}$ 的中點，

$$\overrightarrow{OP}=2\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=(8,10)-(1,2)=(7,8)$$

所以點 P 坐標為 $(3,4)$ 或 $(7,8)$

⑵ ○：直線 L：$x+y-7=0$ 過點 $(3,4)$ 與 $\overleftrightarrow{AB}$：$x-y+1=0$ 垂直，

$$d(A,L)=\frac{4}{\sqrt{2}}，d(B,L)=\frac{2}{\sqrt{2}}$$

⑶ ╳：$\overleftrightarrow{AB}\,//\,L\Rightarrow d(A,L)=d(B,L)$

⑷ ╳：參考選項⑴，L 必通過 $(3,4)$、$(7,8)$ 兩點之一

⑸ ○：因為 $(2024,2023)$ 不在 $\overleftrightarrow{AB}$ 上，

所以與 $(3,4)$、$(7,8)$ 可分別連成兩直線

故選⑵⑸。

7. ⑶⑷⑸

出處：第三冊〈平面向量〉

目標：平面向量線性組合運算

解析：因為 R、P、S 共線，所以存在實數 t，使得

$$\overrightarrow{AP}=t\overrightarrow{AR}+(1-t)\overrightarrow{AS}$$
$$=t(r\overrightarrow{AB})+(1-t)(\overrightarrow{AD}+s\overrightarrow{AB})$$
$$=(tr+s-ts)\overrightarrow{AB}+(1-t)\overrightarrow{AD}$$
$$\Rightarrow\begin{cases}tr+s-ts=\dfrac{1}{3}\\ 1-t=\dfrac{1}{4}\end{cases}\Rightarrow t=\frac{3}{4}、s=\frac{4}{3}-3r$$

⑴ ╳：$\overline{PR}:\overline{PS}=(1-t):t=\frac{1}{4}:\frac{3}{4}=1:3$

$\Rightarrow 3\overline{PR}=\overline{PS}$

⑵ ╳：當 $s=1$ 時，r 有最小值 $\frac{1}{9}$，此時 L 為直線 PC

⑶ ○：當 $s=0$ 時，r 有最大值 $\frac{4}{9}$，此時 L 為直線 PD

⑷ ○：$\frac{4}{9}-\frac{1}{9}=\frac{1}{3}$

⑸ ○：$3\overrightarrow{AR}+\overrightarrow{DS}=\left(3r+\frac{4}{3}-3r\right)\overrightarrow{AB}$

$$=\frac{4}{3}\overrightarrow{AB}$$

故選⑶⑷⑸。

8. ⑴⑵⑶

出處：第一冊〈多項式函數〉、選修數學甲(上)〈微分〉

目標：三次函數圖形對稱中心、切線性質運用

解析：⑴ ○：因為 $f(x)=a(x-0)^3+p(x-0)+0$

$\Rightarrow\Gamma$ 圖形的對稱中心為 $(0,0)$

⑵ ○：$f(5)=g(5)$ 為兩圖形交點的 y 坐標，

$f'(5)=g'(5)$ 為切線斜率

⑶ ○：$f'(x)=3ax^2+p\Rightarrow k=-5$ 時，

$f'(-5)=f'(5)=g'(5)=g'(-5)$

⑷ ╳：當 $m=p$ 時，M_1 為切線，與 Γ 只交於點 $(0,0)$

⑸ ╳：當 M_2 為鉛直線 $x=5$ 時，與 Γ 只交於點 $(5,f(5))$

故選⑴⑵⑶。

三、選填題

9. $\frac{209}{25}$

出處：第二冊〈數列與級數〉

目標：利用偶函數的根相反數性質寫出等差數列各項

解析：因為 $(x-2)(x+2)(x^2+2)+k$

$=(x^2-4)(x^2+2)+k=x^4-2x^2+(k-8)$ 為偶函數

所以方程式的根 a_1，a_2，a_3，a_4 恰為兩負數、兩正數

且 $a_4=-a_1$，$a_3=-a_2$，

因此可假設 4 個根為 $-3t$、$-t$、t、$3t$，即 $x^2=t^2$ 或 $9t^2$

所以多項式 $x^4-2x^2+(k-8)=(x^2-t^2)(x^2-9t^2)$

$=x^4-(10t^2)x^2+9t^4$

比較係數後可得 $t^2=\frac{1}{5}$

$\Rightarrow k=9t^4+8=\frac{9}{25}+8=\frac{209}{25}$。

10. 5

出處：第二冊〈三角比〉、選修數學甲(下)〈二次曲線〉

目標：餘弦定理、雙曲線定義

解析：根據雙曲線性質，點 A 為頂點，

所以 $a=\sqrt{(2\sqrt{5})^2+(4\sqrt{5})^2}=10$，

且 $|\overline{PF_1}-\overline{PF_2}|=2a=20$，

因為 P、F_1 在第一象限、F_2 在第三象限，

所以 $\overline{PF_1}<\overline{PF_2}\Rightarrow\overline{PF_2}-\overline{PF_1}=20$

假設 $\overline{PF_1}=x$

則 $\cos\angle F_1PF_2=\dfrac{\overline{PF_1}^2+\overline{PF_2}^2-\overline{F_1F_2}^2}{2\cdot\overline{PF_1}\cdot\overline{PF_2}}$

$$\Rightarrow\frac{x^2+(x+20)^2-(10\sqrt{5})^2}{2x(x+20)}=\frac{3}{5}$$
$$\Rightarrow\frac{2x^2+40x-100}{2x(x+20)}=\frac{3}{5}$$
$$\Rightarrow 1-\frac{50}{x(x+20)}=\frac{3}{5}$$
$$\Rightarrow\frac{50}{x(x+20)}=\frac{2}{5}$$
$$\Rightarrow x^2+20x-125=0$$

$\Rightarrow(x-5)(x+25)=0\Rightarrow x=5$ 或 $x=-25$ (不合)。

11. $\begin{bmatrix}-3 & 2\\ 2 & -1\end{bmatrix}$

出處：第四冊〈矩陣〉

目標：線性變換矩陣運算

解析：題目所敘述的旋轉並放大之線性變換為

$$\begin{bmatrix}c\\ a+b\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\sqrt{5} & 0\\ 0 & \sqrt{5}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{-1}{\sqrt{5}}\\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}c+d\\ a\end{bmatrix}$$
$$=\begin{bmatrix}2 & -1\\ 1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}c+d\\ a\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2c+2d-a\\ c+d+2a\end{bmatrix}$$

整理後可得方程組

$$\begin{cases} c+2d=a \\ c+d=-a+b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c=-3a+2b \\ d=2a-b \end{cases}$$

即 $\begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$

故二階方陣 $M=\begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$。

第貳部分、混合題或非選擇題

12. $\dfrac{2}{3}$

出處：第四冊〈空間向量〉

目標：空間向量的內積

解析：因為 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=(1,2,-1)\cdot(2,-1,1)=-1$、

$|\overrightarrow{OA}|^2=|\overrightarrow{OB}|^2=6$

$\Rightarrow \dfrac{\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}}{\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}}=\dfrac{a|\overrightarrow{OA}|^2+b\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}}{a\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}+b|\overrightarrow{OB}|^2}=\dfrac{6a-b}{-a+6b}=\dfrac{9}{16}$

$\Rightarrow 3a=2b$，即 $\dfrac{a}{b}=\dfrac{2}{3}$。

13. $(-1,-7,-10)$ 或 $(-5,5,10)$

出處：第四冊〈空間向量〉

目標：空間向量的內積、外積、長度

解析：餘弦值 $\cos\angle AOB=\dfrac{(1,2,-1)\cdot(2,-1,1)}{\sqrt{1+4+1}\cdot\sqrt{4+1+1}}=-\dfrac{1}{6}$

$=\cos\angle AOC=\cos\angle BOC$

即 $-\dfrac{1}{6}=\dfrac{\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}}{\overline{OA}\cdot\overline{OC}}=\dfrac{\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}}{\overline{OB}\cdot\overline{OC}}$

$\Rightarrow -\dfrac{1}{6}=\dfrac{6a-b}{30}=\dfrac{-a+6b}{30}$

$\Rightarrow -5=6a-b=-a+6b \Rightarrow a=b=-1$

而外積 $\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB}=(1,2,-1)\times(2,-1,1)=(1,-3,-5)$

$\Rightarrow \overrightarrow{OC}=(-3,-1,0)+k(1,-3,-5)$

$\Rightarrow |\overrightarrow{OC}|^2=35k^2+10=150 \Rightarrow k=\pm 2$

可得 $\overrightarrow{OC}=(-1,-7,-10)$ 或 $(-5,5,10)$

故點 C 坐標為 $(-1,-7,-10)$ 或 $(-5,5,10)$。

◎評分原則

餘弦值 $\cos\angle AOB=\dfrac{(1,2,-1)\cdot(2,-1,1)}{\sqrt{1+4+1}\cdot\sqrt{4+1+1}}=-\dfrac{1}{6}$

$=\cos\angle AOC=\cos\angle BOC$

即 $-\dfrac{1}{6}=\dfrac{\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}}{\overline{OA}\cdot\overline{OC}}=\dfrac{\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}}{\overline{OB}\cdot\overline{OC}}$

$\Rightarrow -\dfrac{1}{6}=\dfrac{6a-b}{30}=\dfrac{-a+6b}{30}$

$\Rightarrow -5=6a-b=-a+6b \Rightarrow a=b=-1$　(2 分)

而外積 $\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB}=(1,2,-1)\times(2,-1,1)=(1,-3,-5)$

$\Rightarrow \overrightarrow{OC}=(-3,-1,0)+k(1,-3,-5)$

$\Rightarrow |\overrightarrow{OC}|^2=35k^2+10=150 \Rightarrow k=\pm 2$　(1 分)

可得 $\overrightarrow{OC}=(-1,-7,-10)$ 或 $(-5,5,10)$

故點 C 坐標為 $(-1,-7,-10)$ 或 $(-5,5,10)$。　(1 分)

14. $E：x-3y-5z=0$，$P\left(-\dfrac{5}{3},-\dfrac{5}{3},\dfrac{2}{3}\right)$

出處：第四冊〈空間向量〉、第四冊〈空間中的平面與直線〉

目標：空間向量的外積、正射影、角平分向量、解聯立平面方程式、兩平面的交線

解析：外積 $\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB}=(1,-3,-5)$ 為平面 E 法向量

又 $O(0,0,0)$ 在平面 E 上

故平面 E 方程式為 $x-3y-5z=0$

點 P 坐標有下列三種求法：

〈方法 1〉

因為 $\overline{OP}=\overline{OA}$ 且夾角相等，所以點 A 與點 P 對稱於直線 $\overleftrightarrow{OB}$

向量 $\overrightarrow{OA}$ 在 $\overrightarrow{OB}$ 的正射影為 $\left(\dfrac{\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}}{|\overrightarrow{OB}|^2}\right)\overrightarrow{OB}=-\dfrac{1}{6}\overrightarrow{OB}$

所以 $\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+2\left(-\dfrac{1}{6}\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}\right)$

$=-(1,2,-1)-\dfrac{1}{3}(2,-1,1)$

$=\left(-\dfrac{5}{3},-\dfrac{5}{3},\dfrac{2}{3}\right)$

$\Rightarrow$點 P 坐標為 $\left(-\dfrac{5}{3},-\dfrac{5}{3},\dfrac{2}{3}\right)$。

〈方法 2〉

因為 $\overline{OP}=\overline{OA}$ 且夾角相等，所以直線 $\overleftrightarrow{OB}$ 平分 $\angle AOP$

存在實數 t，使得向量 $t\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OP}$

因為 $\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OP}=-1$，上式與 $\overrightarrow{OB}$ 內積

可得 $6t=-2 \Rightarrow t=-\dfrac{1}{3}$

$\Rightarrow \overrightarrow{OP}=-\overrightarrow{OA}-\dfrac{1}{3}\overrightarrow{OB}=\left(-\dfrac{5}{3},-\dfrac{5}{3},\dfrac{2}{3}\right)$

$\Rightarrow$ 點 P 坐標為 $\left(-\dfrac{5}{3},-\dfrac{5}{3},\dfrac{2}{3}\right)$。

〈方法 3〉

假設 $P(x,y,z)$，

因為 $\begin{cases} \overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OP}=-1 \\ P\in E \\ \overline{OP}=\sqrt{6} \end{cases}$

所以 $\begin{cases} 2x-y+z=-1 \\ x-3y-5z=0 \\ x^2+y^2+z^2=6 \end{cases}$

明顯 $A(1,2,-1)$ 符合上列方程組，

且外積 $(2,-1,1)\times(1,-3,-5)=(8,11,-5)$ 為前兩個平面交線方程式的方向向量且過點 A，

所以可以假設 $P(x,y,z)=(8t+1,11t+2,-5t-1)$，

代入第三式可得 $210t^2+70t=0$

$\Rightarrow t=0$ (不合) 或 $t=-\dfrac{1}{3}$

$\Rightarrow$ 點 P 坐標為 $\left(-\dfrac{5}{3},-\dfrac{5}{3},\dfrac{2}{3}\right)$。

◎評分原則

外積 $\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB}=(1,-3,-5)$ 為平面 E 法向量
又 $O(0,0,0)$ 在平面 E 上
故平面 E 方程式為 $x-3y-5z=0$　(1 分)
點 P 坐標有下列三種求法：
〈方法 1〉
因為 $\overline{OP}=\overline{OA}$ 且夾角相等，所以點 A 與點 P 對稱於直線 $\overleftrightarrow{OB}$
向量 $\overrightarrow{OA}$ 在 $\overrightarrow{OB}$ 的正射影為 $\left(\dfrac{\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}}{|\overrightarrow{OB}|^2}\right)\overrightarrow{OB}=-\dfrac{1}{6}\overrightarrow{OB}$
(1 分)
所以 $\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+2\left(-\dfrac{1}{6}\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}\right)$
$=-(1,2,-1)-\dfrac{1}{3}(2,-1,1)$
$=\left(-\dfrac{5}{3},-\dfrac{5}{3},\dfrac{2}{3}\right)$
$\Rightarrow$點 P 坐標為 $\left(-\dfrac{5}{3},-\dfrac{5}{3},\dfrac{2}{3}\right)$。　(2 分)
〈方法 2〉
因為 $\overline{OP}=\overline{OA}$ 且夾角相等，所以直線 $\overleftrightarrow{OB}$ 平分 $\angle AOP$
存在實數 t，使得向量 $t\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OP}$　(1 分)
因為 $\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OP}=-1$，上式與 $\overrightarrow{OB}$ 內積
可得 $6t=-2\Rightarrow t=-\dfrac{1}{3}$　(1 分)
$\Rightarrow\overrightarrow{OP}=-\overrightarrow{OA}-\dfrac{1}{3}\overrightarrow{OB}=\left(-\dfrac{5}{3},-\dfrac{5}{3},\dfrac{2}{3}\right)$
$\Rightarrow$ 點 P 坐標為 $\left(-\dfrac{5}{3},-\dfrac{5}{3},\dfrac{2}{3}\right)$。　(1 分)
〈方法 3〉
假設 $P(x,y,z)$，
因為 $\begin{cases}\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OP}=-1\\ P\in E\\ \overline{OP}=\sqrt{6}\end{cases}$
所以 $\begin{cases}2x-y+z=-1\\ x-3y-5z=0\\ x^2+y^2+z^2=6\end{cases}$　(1 分)
明顯 $A(1,2,-1)$ 符合上列方程組，
且外積 $(2,-1,1)\times(1,-3,-5)=(8,11,-5)$ 為前兩個平面交線方程式的方向向量且過點 A，
所以可以假設 $P(x,y,z)=(8t+1,11t+2,-5t-1)$，
代入第三式可得 $210t^2+70t=0$
$\Rightarrow t=0$ (不合) 或 $t=-\dfrac{1}{3}$
$\Rightarrow$ 點 P 坐標為 $\left(-\dfrac{5}{3},-\dfrac{5}{3},\dfrac{2}{3}\right)$。　(2 分)

15. 0

出處：選修數學甲(上)〈微分〉
目標：導函數求切線斜率
解析：平行切線的斜率相等，
因導函數為 $f'(x)=2(x-k)$、$g'(x)=-2(x+k)$
所以 $2(a-k)=-2(b+k)\Rightarrow a+b=0$。

◎評分原則

平行切線的斜率相等，
因導函數為 $f'(x)=2(x-k)$、$g'(x)=-2(x+k)$　(1 分)
所以 $2(a-k)=-2(b+k)\Rightarrow a+b=0$。　(2 分)

16. $\pm 2\sqrt{k^2+1}-2k$

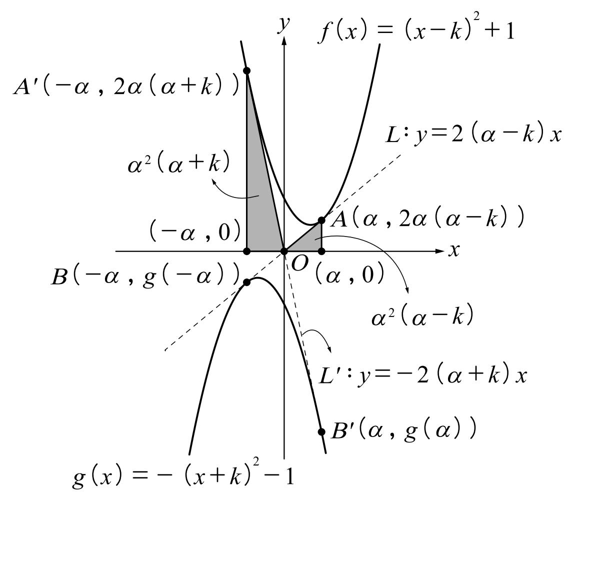
出處：選修數學甲(上)〈微分〉
目標：斜率定義解二次方程式
解析：當 L 為兩個二次函數圖形的公切線時，
設兩切點分別為 $(a,f(a))$、$(-a,g(-a))$
而切線斜率為
$$f'(a)=2(a-k)=\frac{f(a)-g(-a)}{a-(-a)}=\frac{2a^2-4ka+2k^2+2}{2a}$$
$$\Rightarrow 2a^2-2ak=a^2-2ak+k^2+1\Rightarrow a=\pm\sqrt{k^2+1}$$
恰有兩相異公切線，切線斜率為 $\pm 2\sqrt{k^2+1}-2k$。

◎評分原則

當 L 為兩個二次函數圖形的公切線時，
設兩切點分別為 $(a,f(a))$、$(-a,g(-a))$　(1 分)
而切線斜率為
$f'(a)=2(a-k)=\dfrac{f(a)-g(-a)}{a-(-a)}=\dfrac{2a^2-4ka+2k^2+2}{2a}$　(1 分)
$\Rightarrow 2a^2-2ak=a^2-2ak+k^2+1\Rightarrow a=\pm\sqrt{k^2+1}$　(1 分)
恰有兩相異公切線，切線斜率為 $\pm 2\sqrt{k^2+1}-2k$。　(1 分)

17. $\dfrac{2}{3}(k^2+1)^{\frac{3}{2}}$

出處：選修數學甲(上)〈微分〉、選修數學甲(上)〈積分〉
目標：切線與二次函數圍成的有界區域面積
解析：令 $\alpha=\sqrt{k^2+1}$
$\Rightarrow f(\alpha)=(\alpha-k)^2+1=2\alpha(\alpha-k)$
$\Rightarrow f(-\alpha)=(-\alpha-k)^2+1=2\alpha(\alpha+k)$
因為公切線斜率 $=2\sqrt{k^2+1}-2k=2\alpha-2k=\dfrac{f(\alpha)-0}{\alpha-0}$
另一公切線斜率 $=-2\sqrt{k^2+1}-2k=-2\alpha-2k$
$=\dfrac{f(-\alpha)-0}{-\alpha-0}$
所以兩公切線相交於原點
故圍成的有界區域面積為 $f(x)$ 積分減去左右兩個三角形面積，(參考下圖)



$$面積=\int_{-\alpha}^{\alpha}((x-k)^2+1)dx-\frac{\alpha\cdot(2\alpha(\alpha-k)+2\alpha(\alpha+k))}{2}$$

$$=\left(\frac{x^3}{3}-kx^2+\alpha^2x\right)\Bigg|_{-\alpha}^{\alpha}-\alpha(2\alpha^2)$$

$$=\frac{2\alpha^3}{3}+2\alpha^3-2\alpha^3=\frac{2}{3}(k^2+1)^{\frac{3}{2}}\ 。$$

◎評分原則

令 $\alpha=\sqrt{k^2+1}$

$\Rightarrow f(\alpha)=(\alpha-k)^2+1=2\alpha(\alpha-k)$

$\Rightarrow f(-\alpha)=(-\alpha-k)^2+1=2\alpha(\alpha+k)$

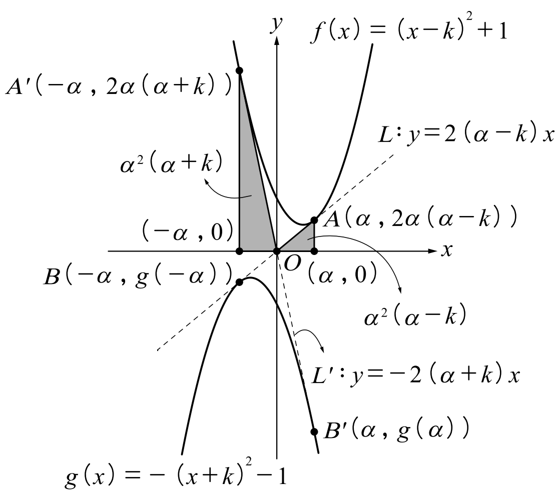
因為公切線斜率$=2\sqrt{k^2+1}-2k=2\alpha-2k=\dfrac{f(\alpha)-0}{\alpha-0}$

另一公切線斜率$=-2\sqrt{k^2+1}-2k=-2\alpha-2k$

$$=\frac{f(-\alpha)-0}{-\alpha-0}$$

所以兩公切線相交於原點　(1 分)

故圍成的有界區域面積為 $f(x)$ 積分減去左右兩個三角形面積，(參考下圖)



$$面積=\int_{-\alpha}^{\alpha}((x-k)^2+1)dx-\frac{\alpha\cdot(2\alpha(\alpha-k)+2\alpha(\alpha+k))}{2}\ (2\ 分)$$

$$=\left(\frac{x^3}{3}-kx^2+\alpha^2x\right)\Bigg|_{-\alpha}^{\alpha}-\alpha(2\alpha^2)$$

$$=\frac{2\alpha^3}{3}+2\alpha^3-2\alpha^3=\frac{2}{3}(k^2+1)^{\frac{3}{2}}\ 。\quad(2\ 分)$$