

數學甲考科詳解

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.
(4)	(3)	(1)	(1)(4)	(1)(4)(5)	(1)(2)	(2)(4)
8.						
(1)(2)(5)						

第壹部分、選擇(填)題

一、單選題

1. (4)

出處：第二冊〈三角比〉

目標：餘弦定理、三角形面積公式

解析：令 $\overline{BC} = a$, $\overline{AC} = b = 12$, $\overline{AB} = c$

$$\text{因此 } a + 12 + c = 30 \Rightarrow a + c = 18$$

由餘弦定理可知

$$12^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos 60^\circ$$

$$\Rightarrow a^2 + c^2 - ac = 144$$

$$\text{又 } (a+c)^2 - (a^2 + c^2 - ac) = 18^2 - 144$$

$$\Rightarrow 3ac = 180 \Rightarrow ac = 60$$

$$\triangle ABC \text{ 的面積為 } \frac{1}{2} ac \sin B = \frac{1}{2} \times 60 \times \sin 60^\circ = 15\sqrt{3}$$

故選(4)。

2. (3)

出處：第二冊〈排列組合與機率〉

目標：排列組合、分類討論

解析：定義由上到下依序為第一列到第四列

情況 A：第一列不著色。依序從第二列、第三列、第四列選取一個不同直行的方格，

$$\text{方法數為 } 3 \times (5-1) \times (7-2) = 60$$

情況 B：第二列不著色。依序從第一列、第三列、第四列選取一個不同直行的方格，

$$\text{方法數為 } 1 \times (5-1) \times (7-2) = 20$$

情況 C：第三列不著色。依序從第一列、第二列、第四列選取一個不同直行的方格，

$$\text{方法數為 } 1 \times (3-1) \times (7-2) = 10$$

情況 D：第四列不著色。依序從第一列、第二列、第三列選取一個不同直行的方格，

$$\text{方法數為 } 1 \times (3-1) \times (5-2) = 6$$

總共有 $60 + 20 + 10 + 6 = 96$ 種著色法

故選(3)。

3. (1)

出處：選修數學甲〈複數與多項式方程式〉

目標：虛根成對、因式分解

解析：由虛根成對可知 $\beta = 3 - 4i$

$$\text{則 } x = 3 \pm 4i \Rightarrow (x-3)^2 = (\pm 4i)^2 \Rightarrow x^2 - 6x + 9 = -16 \\ \Rightarrow x^2 - 6x + 25 = 0$$

$$\therefore 2x^3 + ax^2 + bx + 125 = (x^2 - 6x + 25)(2x + 5) \\ = 2x^3 - 7x^2 + 20x + 125$$

因此 $a + \beta + \gamma + a + b$

$$= \frac{-5}{2} + (3-4i) + (3+4i) + (-7) + 20 = \frac{33}{2}$$

故選(1)。

二、多選題

4. (1)(4)

出處：選修數學甲〈複數與多項式方程式〉

目標：1 的 n 次方根

解析：(1) ○：當 $z = i$ 且 k 為非負整數時

$$|S_{4k+1}| = |i| = 1$$

$$|S_{4k+2}| = |i + i^2| = |-1 + i| = \sqrt{2}$$

$$|S_{4k+3}| = |i + i^2 + i^3| = |-1| = 1$$

$$|S_{4k+4}| = |i + i^2 + i^3 + i^4| = |0| = 0$$

(2) ✕：反例： $z = \cos 40^\circ + i \sin 40^\circ$

$$z^9 = 1 \Rightarrow z^9 - 1 = 0 \Rightarrow \frac{z^9 - 1}{z - 1} = 0$$

$$\Rightarrow z^8 + z^7 + z^6 + \dots + 1 = 0$$

$$\Rightarrow z^9 + z^8 + z^7 + \dots + z = 0$$

$$\Rightarrow S_9 = 0$$

因此 $|z| = 1$ 時， $|S_9| = |0| = 0$

(3) ✕：同(2)，或 $z = i$ 亦為反例

(4) ○：若 $|z| \leq 1$ ，則 $|z^n| = |z|^n \leq 1$ ，

$$\text{因此 } |S_9| = |z + z^2 + z^3 + \dots + z^9| \\ \leq |z| + |z^2| + |z^3| + \dots + |z^9| \leq 9$$

(5) ✕：同(2)，或 $z = i$ 亦為反例

故選(1)(4)。

5. (1)(4)(5)

出處：第二冊〈數列與級數〉、第三冊〈指數與對數函數〉

目標：等差數列、等比數列、對數律、指數律

解析：令 $\log_2 a = p$, $\log_2 b = p + q$, $\log_2 c = p + 2q$ ，

$$\log_2 d = m, \log_2 e = mn, \log_2 f = mn^2$$

(1) ○： $a = 2^p$

$$b = 2^{p+q} = 2^p \times 2^q$$

$$c = 2^{p+2q} = 2^p \times 2^{2q}$$

此為等比數列

(2) ✕：反例：序組 $(d, e, f) = (2, 4, 16)$

此時 $\log_2 2, \log_2 4, \log_2 16$ 依序為 1、2、4

此為等比數列，但是 2、4、16 不為等比數列

(3) ✕：反例：序組 $(a, b, c) = (2, 4, 8)$

此時 $\log_2 2, \log_2 4, \log_2 8$ 依序為 1、2、3

此為等差數列，但是 $2^2, 2^4, 2^8$ 不為等比數列

(4) ○： $\log_8 (a^2) = \log_{2^3} (a^2) = \frac{2}{3} \log_2 a = \frac{2}{3} p$

$$\log_8 (b^2) = \frac{2}{3} \log_2 b = \frac{2}{3} (p+q)$$

$$\log_8 (c^2) = \frac{2}{3} \log_2 c = \frac{2}{3} (p+2q)$$

此為公差為 $\frac{2}{3} q$ 的等差數列

(5) ○： $\log_{16} d = \log_{2^4} d = \frac{1}{4} \log_2 d = \frac{1}{4} m$

$$\log_4 e = \log_{2^2} e = \frac{1}{2} \log_2 e = \frac{1}{2} mn$$

$$\log_2 f = mn^2$$

此為公比為 $2n$ 的等比數列

$$\text{註：} \log_{a^n} b^m = \frac{\log b^m}{\log a^n} = \frac{m}{n} \times \frac{\log b}{\log a} = \frac{m}{n} \times \log_a b$$

故選(1)(4)(5)。

6. (1)(2)

出處：選修數學甲〈微分〉

目標：微分、遞增遞減判斷、凹口方向判斷

解析： $f'(x) = (x-2)^3 + (x-1) \times 3(x-2)^2 = (x-2)^2(4x-5)$

$$f''(x) = 2(x-2)(4x-5) + (x-2)^2 \times 4 = (x-2)(12x-18) \\ = 6(x-2)(2x-3)$$

$$(1) \bigcirc : f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2} \times \left(-\frac{1}{2}\right)^3 < 0$$

$$(2) \bigcirc : f'(x) = (x-2)^2(4x-5)$$

當 $x > \frac{5}{4}$ 時，因為 $f'(x) \geq 0$ ，所以 $y=f(x)$ 為遞增

當 $x < \frac{5}{4}$ 時，因為 $f'(x) < 0$ ，所以 $y=f(x)$ 為遞減

因此當 $x > \frac{3}{2}$ 時， $y=f(x)$ 為遞增函數

(3) $\times$ ：承(2)，當 $\frac{4}{5} < x < \frac{3}{2}$ 時， $y=f(x)$ 仍為遞增函數

$$(4) \times : f''(x) = 6(x-2)(2x-3)$$

當 $x < \frac{3}{2}$ 或 $x > 2$ 時，因為 $f''(x) > 0$ ，

所以此時 $y=f(x)$ 為凹口向上

當 $\frac{3}{2} < x < 2$ 時，因為 $f''(x) < 0$ ，

所以此時 $y=f(x)$ 為凹口向下

(5) $\times$ ：同(4)

故選(1)(2)。

7. (2)(4)

出處：第一冊〈多項式函數〉、選修數學甲〈微分〉

目標：三次多項式的對稱性、局部特徵、微分

解析：因為反曲點 $(1, a)$ 在直線 $y = -2x + 5$ 上

將 $(1, a)$ 代入 $y = -2x + 5$ 可得 $a = 3$

由反曲點 $(1, 3)$ 及 $y=f(x)$ 的函數圖形在 $x=1$ 附近的

一次近似為 $y = -2x + 5$ ，斜率為 -2

且多項式 $f(x)$ 的最高次項係數為 3

可推得 $f(x) = 3(x-1)^3 - 2(x-1) + 3$

$$(1) \times : a = 3$$

$$(2) \bigcirc : f'(1) \text{ 為 } f(x) \text{ 在 } x=1 \text{ 時的切線斜率，}$$

即為 $f(x)$ 在 $x=1$ 附近的一次近似的直線斜率，
應為 -2

$$(3) \times : \text{將 } x=0.998 \text{ 代入 } y = -2x + 5 \text{ 可得 } y = 3.004$$

$$\Rightarrow f(0.998) \approx 3.004$$

$$(4) \bigcirc : f'(x) = 9(x-1)^2 - 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = f'(0) = 7$$

$$(5) \times : f'(2) = 7, f(2) = 4$$

$y=f(x)$ 的函數圖形在 $x=2$ 附近的一次近似即

為在 $x=2$ 的切線 $y = 7(x-2) + 4 = 7x - 10$

故選(2)(4)。

8. (1)(2)(5)

出處：第三冊〈平面向量〉

目標：向量的線性組合

解析：(1) $\bigcirc$ ： $\triangle ABF$ 與 $\triangle ACE$ 中

兩者共用 $\angle BAC$ ，且 $\angle ABF = \angle ACE = 90^\circ$ ，

因此 $\triangle ABF \sim \triangle ACE$ (AA 相似)

$$(2) \bigcirc : \text{已知 } \overrightarrow{AD} = \frac{1}{4} \overrightarrow{AB} + \frac{25}{28} \overrightarrow{AC}$$

且 B, D, F 三點共線

$$\text{所以 } \overrightarrow{AD} = \frac{1}{4} \overrightarrow{AB} + \frac{3}{4} \overrightarrow{AF}$$

$$(3) \times : \text{已知 } \overrightarrow{AD} = \frac{1}{4} \overrightarrow{AB} + \frac{25}{28} \overrightarrow{AC}$$

且 C, D, E 三點共線

$$\text{所以 } \overrightarrow{AD} = \frac{3}{28} \overrightarrow{AE} + \frac{25}{28} \overrightarrow{AC}$$

$$\text{因此 } \frac{1}{4} \overrightarrow{AB} = \frac{3}{28} \overrightarrow{AE} \Rightarrow \overrightarrow{AB} = \frac{3}{7} \overrightarrow{AE}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{AB} : \overrightarrow{AE} = 3 : 7 \Rightarrow \overrightarrow{AB} : \overrightarrow{BE} = 3 : 4$$

$$(4) \times : \text{承(2)，} \frac{25}{28} \overrightarrow{AC} = \frac{3}{4} \overrightarrow{AF} \Rightarrow \overrightarrow{AF} = \frac{25}{21} \overrightarrow{AC} = 25$$

承(3)，令 $\overrightarrow{AB} = 3m$ ，因此 $\overrightarrow{BE} = 4m$ ， $\overrightarrow{AE} = 7m$

又 $\triangle ABF \sim \triangle ACE$

$$\text{所以 } \frac{\overrightarrow{AB}}{\overrightarrow{AF}} : \frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{AE}} \Rightarrow \frac{3m}{25} : \frac{21}{7m} \Rightarrow 21m^2 = 21 \times 25$$

$$\Rightarrow m = 5, \overrightarrow{AB} = 15$$

$$(5) \bigcirc : \cos \angle BAC = \cos \angle BAF = \frac{\overrightarrow{AB}}{\overrightarrow{AF}} = \frac{15}{25} = \frac{3}{5}$$

故選(1)(2)(5)。

三、選填題

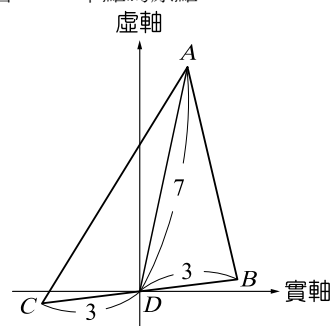
9. 152

出處：第二冊〈三角比〉、

選修數學甲〈複數與多項式方程式〉

目標：複數平面、複數極式、中線定理

解析：如下圖， $\overline{BC}$ 中點為原點 D



$\triangle ABC$ 中， $\overline{BD} = \overline{CD} = 3$ ，中線 $\overline{AD} = 7$

由中線定理可知

$$\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = 2\overline{AD}^2 + 2\overline{BD}^2 = 2 \times 7^2 + 2 \times 3^2 = 116$$

$$\overline{BC}^2 = 6^2 = 36$$

$$\text{故 } \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 = 116 + 36 = 152。$$

註：中線定理說明

$$\text{令 } \angle ADB = \theta, \overline{AD} = l, \overline{BD} = \overline{CD} = m$$

由餘弦定理可知

$$\overline{AB}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{BD}^2 - 2\overline{AD} \times \overline{BD} \times \cos \angle ADB$$

$$\Rightarrow \overline{AB}^2 = l^2 + m^2 - 2lm \cos \theta \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$\overline{AC}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{CD}^2 - 2\overline{AD} \times \overline{CD} \times \cos \angle ADC$$

$$\Rightarrow \overline{AC}^2 = l^2 + m^2 - 2lm \cos (180^\circ - \theta)$$

$$= l^2 + m^2 + 2lm \cos \theta \cdots \cdots \textcircled{2}$$

由①+②可得 $\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = 2l^2 + 2m^2。$

10. -2

出處：第四冊〈矩陣〉

目標：旋轉矩陣、乘法反方陣

解析：令 $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$

$$\because A \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \end{bmatrix} \text{ 且 } A \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ -3 \end{bmatrix}$$

$\therefore A$ 為逆時針旋轉 90° 的旋轉矩陣

$$\text{因此 } A = \begin{bmatrix} \cos 90^\circ & -\sin 90^\circ \\ \sin 90^\circ & \cos 90^\circ \end{bmatrix} \\ = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -5 \\ -6 \end{bmatrix} \text{ 逆時針旋轉 } 90^\circ \text{ 後為 } \begin{bmatrix} g \\ h \end{bmatrix}, \text{ 因此 } \begin{bmatrix} g \\ h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ -5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} e \\ f \end{bmatrix} \text{ 逆時針旋轉 } 90^\circ \text{ 後為 } \begin{bmatrix} 7 \\ 8 \end{bmatrix}, \text{ 等價於 } \begin{bmatrix} 7 \\ 8 \end{bmatrix} \text{ 順時針旋轉}$$

$$90^\circ \text{ 後為 } \begin{bmatrix} e \\ f \end{bmatrix}, \text{ 因此 } \begin{bmatrix} e \\ f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ -7 \end{bmatrix}$$

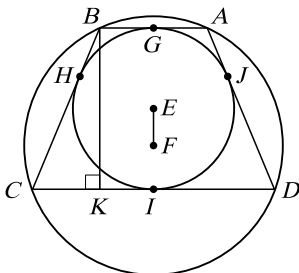
$$\text{故 } (a+b+c+d)-(e+f+g+h) \\ = (0+(-1)+1+0)-(8+(-7)+6+(-5)) \\ = 0-2 = -2.$$

11. $\frac{65}{24}$

出處：第一冊〈直線與圓〉、第三冊〈平面向量〉

目標：解析幾何、垂直平分線、直線的法向量

解析：如下圖，由對稱性可知



$$\overline{AJ} = \overline{AG} = 4, \overline{BH} = \overline{BG} = 4, \overline{CH} = \overline{CI} = 9, \\ \overline{DJ} = \overline{DI} = 9$$

$$\text{因此 } \overline{AD} = \overline{BC} = 4+9=13$$

$$\overline{CK} = \frac{1}{2}(\overline{CD} - \overline{AB}) = 5$$

$$\overline{BK} = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12$$

定各點坐標為 $I(0, 0)$ 、 $A(4, 12)$ 、 $B(-4, 12)$ 、

$C(-9, 0)$ 、 $D(9, 0)$ 、 $G(0, 12)$

內切圓圓心 E 為 $\overline{GI}$ 中點 $(0, 6)$

$\overrightarrow{AD} = (5, -12)$ ，此為 $\overline{AD}$ 中垂線之法向量

$$\overline{AD} \text{ 中點為 } \left(\frac{13}{2}, 6 \right)$$

$$\overline{AD} \text{ 中垂線為 } 5x - 12y = -\frac{79}{2}$$

$$x=0 \text{ 代入可得外接圓圓心為 } F\left(0, \frac{79}{24}\right)$$

$$\text{故 } \overline{EF} = 6 - \frac{79}{24} = \frac{65}{24}.$$

第貳部分、混合題或非選擇題

12. (4)

出處：選修數學甲〈微分〉

目標：導函數

解析： $f'(x) = 9x^2 - 8x + 5$ ， $a = f'(1) = 9 - 8 + 5 = 6$

$$g'(x) = 4x + 1, b = g'(1) = 4 + 1 = 5$$

因此數對 $(a, b) = (6, 5)$ ，故選(4)。

13. 104

出處：選修數學甲〈微分〉

目標：微分的公式

解析： $f(1) = 3 - 4 + 5 = 4$ ， $g(1) = 2 + 1 - 1 = 2$ ，

$$f'(1) = 6, g'(1) = 5$$

$$h(x) = f(x) \cdot (g(x))^2,$$

$$h'(x) = f'(x) \cdot (g(x))^2 + f(x) \cdot 2g(x)g'(x)$$

$$\text{因為 } h(1) = f(1) \cdot (g(1))^2 = 4 \times 2^2 = 16$$

$$\text{所以 } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{h(x) - 16}{x - 1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{h(x) - h(1)}{x - 1} = h'(1)$$

$$= f'(1) \cdot (g(1))^2 + f(1) \cdot 2g(1)g'(1)$$

$$= 6 \times 2^2 + 4 \times 2 \times 2 \times 5 = 104.$$

◎評分原則

$$f(1) = 3 - 4 + 5 = 4, g(1) = 2 + 1 - 1 = 2,$$

$$f'(1) = 6, g'(1) = 5 \quad (1 \text{ 分})$$

$$h(x) = f(x) \cdot (g(x))^2,$$

$$h'(x) = f'(x) \cdot (g(x))^2 + f(x) \cdot 2g(x)g'(x)$$

$$\text{因為 } h(1) = f(1) \cdot (g(1))^2 = 4 \times 2^2 = 16 \quad (1 \text{ 分})$$

$$\text{所以 } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{h(x) - 16}{x - 1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{h(x) - h(1)}{x - 1} = h'(1) \quad (2 \text{ 分})$$

$$= f'(1) \cdot (g(1))^2 + f(1) \cdot 2g(1)g'(1) \quad (1 \text{ 分})$$

$$= 6 \times 2^2 + 4 \times 2 \times 2 \times 5 = 104. \quad (1 \text{ 分})$$

14. (104, -88)

出處：選修數學甲〈微分〉

目標：切線方程式

解析：由第 13 題可知 $h(1) = 16$ ， $h'(1) = 104$

$$\text{所求切線方程式為 } y = 104(x - 1) + 16 = 104x - 88$$

$$\text{故數對 } (m, d) = (104, -88).$$

◎評分原則

$$\text{由第 13 題可知 } h(1) = 16, h'(1) = 104 \quad (1 \text{ 分})$$

$$\text{所求切線方程式為 } y = 104(x - 1) + 16 = 104x - 88$$

$$\text{故數對 } (m, d) = (104, -88). \quad (1 \text{ 分})$$

15. (1)

出處：第四冊〈空間中的平面與直線〉

目標：外積、平面法向量

解析：直線 BC 的方向向量為 $\vec{\ell}_2 = (2, 3, 1)$

$$\text{直線 } GH \text{ 的方向向量為 } \vec{\ell}_3 = (3, 1, 2)$$

$$\text{且 } \vec{\ell}_2 \times \vec{\ell}_3 = (5, -1, -7)$$

取 $(5, -1, -7)$ 為平面 $ABCD$ 的一個法向量

在直線 BC 上取一點 $Q(1, -8, 7)$

因此平面 $ABCD$ 的方程式為 $5x - y - 7z = -36$

故選(1)。

16. (2, 4, 6)

出處：第四冊〈空間中的平面與直線〉

目標：直線與平面的交點

解析：由直線 AE 的對稱比例式可令點 A 坐標為 $(t, 2t, 3t)$ ，

t 為實數

代入 $5x - y - 7z = -36$ 可得 $-18t = -36$

$\Rightarrow t = 2$

故點 A 的坐標為 $(2, 4, 6)$ 。

◎評分原則

由直線 AE 的對稱比例式可令點 A 坐標為 $(t, 2t, 3t)$ ， t 為實數 (1 分)

代入 $5x - y - 7z = -36$ 可得 $-18t = -36$

$\Rightarrow t = 2$ (1 分)

故點 A 的坐標為 $(2, 4, 6)$ 。(1 分)

17. (11, 7, 12)

出處：第四冊〈空間中的平面與直線〉

目標：直線與平面的交點、直線與直線的交點

解析：在直線 GH 上取一點 $R(-12, 12, 0)$ ，且平面 $EFGH$ 的

法向量為 $(5, -1, -7)$

因此平面 $EFGH$ 的方程式為 $5x - y - 7z = -72$

由直線 AE 的對稱比例式可令點 E 坐標為 $(s, 2s, 3s)$ ，

s 為實數

代入 $5x - y - 7z = -72$ 可得 $-18s = -72 \Rightarrow s = 4$

則點 E 的坐標為 $(4, 8, 12)$ ， $\overrightarrow{AE} = (2, 4, 6)$

令 $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{HG} = m \overrightarrow{\ell_3} = (3m, m, 2m)$

因此 $B = A + \overrightarrow{AB} = (3m + 2, m + 4, 2m + 6)$

代入直線 BC ： $\frac{x-1}{2} = \frac{y+8}{3} = \frac{z-7}{1}$

可得 $\frac{3m+1}{2} = \frac{m+12}{3} = \frac{2m-1}{1} \Rightarrow m = 3$

$\overrightarrow{AB} = 3 \overrightarrow{\ell_3} = (9, 3, 6)$

故 $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AE} = (11, 7, 12)$ 。

◎評分原則

在直線 GH 上取一點 $R(-12, 12, 0)$ ，且平面 $EFGH$ 的法向量為 $(5, -1, -7)$

因此平面 $EFGH$ 的方程式為 $5x - y - 7z = -72$ (1 分)

由直線 AE 的對稱比例式可令點 E 坐標為 $(s, 2s, 3s)$ ， s 為實數

代入 $5x - y - 7z = -72$ 可得 $-18s = -72 \Rightarrow s = 4$

則點 E 的坐標為 $(4, 8, 12)$ ， $\overrightarrow{AE} = (2, 4, 6)$ (1 分)

令 $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{HG} = m \overrightarrow{\ell_3} = (3m, m, 2m)$

因此 $B = A + \overrightarrow{AB} = (3m + 2, m + 4, 2m + 6)$ (1 分)

代入直線 BC ： $\frac{x-1}{2} = \frac{y+8}{3} = \frac{z-7}{1}$

可得 $\frac{3m+1}{2} = \frac{m+12}{3} = \frac{2m-1}{1} \Rightarrow m = 3$

$\overrightarrow{AB} = 3 \overrightarrow{\ell_3} = (9, 3, 6)$ (2 分)

故 $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AE} = (11, 7, 12)$ 。(1 分)