

全國公私立 113 學年度分科測驗第六次數學甲(南一)

第壹部分：選擇題(占 72 分)



一、單選題(占 24 分)

1. 已知 a, b, c 三正數成等比，若 $\log_8 a + \log_8 b + \log_8 c = 10$ ，則 $a \times c$ 為幾位數？
(1) 6 (2) 7 (3) 8 (4) 9 (5) 10
2. 複數平面上， Γ 為以原點 O 為圓心的單位圓， $A(a), B(b), C(c), D(d), E(e)$ 為圓 Γ 上，五點，若 $\widehat{AB} = \widehat{BC} = \widehat{CD} = \widehat{DE} = \widehat{EA}$ ，則 $\frac{(a+b+c)(b+c+d)(c+d+e)(d+e+a)(e+a+b)}{(a+b)(b+c)(c+d)(d+e)(e+a)}$ 之值為何？ (1) -5 (2) -1 (3) 0 (4) 1 (5) 5
3. 方程式 $\sin 2x = \frac{1}{2} \log_{\pi} x^2$ 的實根有幾個？ (1) 1 (2) 2 (3) 3 (4) 4 (5) 5
4. 設 $a > 0$ ，點 $P(a, a^2)$ 在 $\Gamma: y = x^2$ 上， Q 點在 x 軸正向上且滿足 $\overline{OP} = \overline{OQ}$ ，直線 PQ 交 y 軸於 R 點。當 P 點沿著曲線趨近於原點時，則 R 點 y 坐標的右極限為何？
(1) 0 (2) 1 (3) 2 (4) 自然常數 e (5) 不存在

二、多選題(占 24 分)

5. 設 α, β 為正實數，已知矩陣 $A = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}$ ，矩陣 B 為鏡射直線 $y = (\tan \beta)x$ 的鏡射矩陣，矩陣 C 為鏡射 x 軸的鏡射矩陣，矩陣 D 為鏡射 y 軸的鏡射矩陣。試選出正確的選項。
(1) $B^2 = (CD)^2$ (2) 若 $\frac{\pi}{\alpha}$ 為正整數，則 $CD = A^{\frac{\pi}{\alpha}}$ (3) $A^{-1} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ \sin \alpha & -\cos \alpha \end{bmatrix}$
(4) AB 為鏡射矩陣 (5) 若 $\alpha = \beta$ ，則 ABA^{-1} 為鏡射直線 $y = (\tan 3\beta)x$ 的鏡射矩陣
6. 已知甲、乙兩個桶子中均裝有黑白兩色且形狀大小皆相同的小球，甲桶內共有 10 顆小球，乙桶內共有 15 顆小球，每回合隨機從兩個桶子中各取一顆球觀察顏色且取後放回，每回合取球皆為獨立事件。若每回合取出的兩顆球皆為黑球的機率為 $\frac{27}{50}$ ，試選出正確的選項。
(1) 每回合取出的兩顆球皆為白球的機率為 $\frac{1}{25}$ (2) 每回合取出的兩顆球為一白一黑的機率為 $\frac{9}{50}$ (3) 每回合取出的兩顆球為一白一黑的機率為 $\frac{21}{50}$ (4) 取球 3 回合，則總計取出 4 顆黑球的機率為 $\frac{3^6 \times 52}{50^3}$ (5) 取球 10 回合，則取出白球總數的期望值為 10 顆
7. 設 θ 為一實數變數。給定坐標平面上的兩直線 L_1, L_2 ，其中 L_1 為通過 $(0, 0)$ 且與 x 軸正向夾角為 2θ 的直線； L_2 為通過 $(3, 0)$ 且與 x 軸正向夾角為 $(\pi - \theta)$ 的直線。已知 L_1 與 L_2 的交點 $P(x, y)$ 所形成的軌跡為 x 軸及二次曲線 $\Gamma: 3x^2 - y^2 - 12x + a = 0$ 。試選出正確的選項。
(1) $(0, 0)$ 為 Γ 的頂點 (2) x 軸是 Γ 的對稱軸 (3) Γ 通過四個象限
(4) Γ 與直線 $x=2$ 不相交 (5) Γ 與直線 $\sqrt{3}x + y - 2\sqrt{3} = 0$ 不相交

三、選填題(占 24 分)

8. 已知直線 L_1 與圓 $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 4$ 交於相異兩點 A, B 。令點 $C(1, 2)$ 且平面上任意點 Q 皆可表示為 $\overrightarrow{QC} = k\overrightarrow{QA} + (1-k)\overrightarrow{QB}$ (k 為實數)。若 P 為直線 $L_2: 3x+4y+4=0$ 上的一點，則 $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB}$ 的最小值為_____。
9. 已知空間中有原點 O 、 $A(1, 7, 5)$ 、 $B(0, 2, -1)$ 、 $C(3, 2, 2)$ 四個點，若 m, n 為實數，則 $|\overrightarrow{OA} - m\overrightarrow{OB} - n\overrightarrow{OC}|$ 的最小值為_____。
10. 坐標平面上， P 為直線 $L: 3x-4y+14=0$ 上的動點。若 P 點到圓： $x^2 + y^2 + 3y + k = 0$ (k 為實數) 的最近距離為 1，則此圓在第三，四象限的弧長為_____。
11. 設 a 為實數，在 xy 平面上，若函數 $f(x) = \frac{1}{3}ax^3 - \frac{1}{2}ax^2 - 2ax + 5a + 1$ 的圖形通過全部四個象限，則 a 的範圍為_____。(化為最簡分數)

第貳部分：混合題或非選擇題(占28分)

12-14 題為題組

將矩形 $ABCD$ 沿 $\overline{BD}$ 摺起，使 $\overrightarrow{BA}$ 在平面 BCD 的正射影與 $\overrightarrow{BA}$ 在直線 BD 的正射影相同，已知 $\overline{AB} = 15, \overline{BC} = 20$ 。試回答下列問題。

12. 求線段 AC 的長。(非選擇題，6 分)
13. 求 $|\overrightarrow{CB} \cdot (\overrightarrow{CA} \times \overrightarrow{CD})|$ 之值。(非選擇題，4 分)
14. 求 A 點到直線 BC 的距離。(非選擇題，4 分)
- _____

15-17 題為題組

已知函數 $f(x) = \begin{cases} -7x, & -3 \leq x \leq 2 \\ -2x+7, & 2 < x \leq 5 \end{cases}$ ，函數 $g(x) = x^3 - 5x^2 - 6x + 1 + f(x)$ ，其中 $-3 \leq x \leq 5$ 。

試回答下列問題。

15. 分別求 $\lim_{x \rightarrow 2^-} g(x)$ 、 $\lim_{x \rightarrow 2^+} g(x)$ 、 $g(2)$ 之值。(非選擇題，3 分)

16. 求在 $-3 < x < 2$ 的範圍中，過點 $P(0, 1)$ 且與 $g(x)$ 相切的直線方程式。(非選擇題，4 分)

17. 求在 $-3 \leq x \leq 5$ 的範圍中， $g(x)$ 的最大值與最小值。(非選擇題，7 分)

參考數值： $\sqrt{2} \approx 1.414, \sqrt{3} \approx 1.732, \sqrt{5} \approx 2.236, \sqrt{6} \approx 2.449, \pi \approx 3.142$

對數值： $\log 2 \approx 0.3010, \log 3 \approx 0.4771, \log 5 \approx 0.6990, \log 7 \approx 0.8451$

RA6118 全國公私立 113 學年度分科測驗第六次數學甲(南一)

參考答案

選擇題：1.(2) 2.(2) 3.(4) 4.(3) 5.(1)(2)(4) 6.(1)(3) 7.(2)(3)(4)(5)

選填題：8.5 9.5 10. 4π 11. $\frac{-3}{5} < a < \frac{-6}{37}$

混合題或非選擇題：12. $\sqrt{337}$ 13.3600 14. $\frac{3}{5}\sqrt{481}$

15. $\lim_{x \rightarrow 2^-} g(x) = -37, \lim_{x \rightarrow 2^+} g(x) = -20, g(2) = -37$ 16. $y = -13x + 1$

17. $g(x)$ 的最大值為 8，最小值為 -40