# 全國公私立高級中學113學年度分科測驗第六次聯合模擬考試

## 數學甲考科解析

考試日期：114年4月9日

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8-1 | 9-1 | 10-1 | 11-1 | 11-2 | 11-3 | 11-4 | 11-5 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 2 | 2 | 4 | 3 | 124 | 13 | 2345 | 5 | 5 | 4 | — | 3 | 5 | — | 6 |
| 11-6 | 11-7 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | | | | | | | |
| 3 | 7 | | | | | | | | | | | | | |

## 第壹部分、選擇（填）題

### 一、單選題

1. 【知識點】實數與指對數

【解析】$\log_8 a+\log_8 b+\log_8 c=10 \Rightarrow \log_8 abc=10$
$\Rightarrow abc=8^{10}=2^{30}$。
因為 $a$、$b$、$c$ 三正數成等比，所以 $abc=b^3 \Rightarrow b=2^{10}$，
又 $a\times c=b^2=2^{20}\approx(10^{0.3010})^{20}=10^{6.02} \Rightarrow a\times c$ 為 7 位數，
故選(2)。

2. 【知識點】複數平面

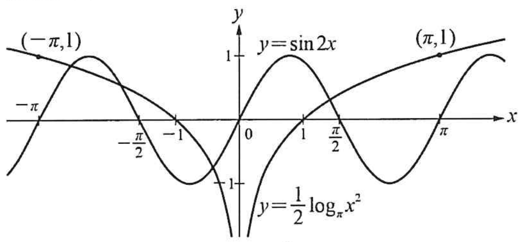
【解析】因為 $\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{BC}=\overset{\frown}{CD}=\overset{\frown}{DE}=\overset{\frown}{EA}$，
所以 $ABCDE$ 為正五邊形 $\Rightarrow a+b+c+d+e=0$，

所求 $=\dfrac{(-d-e)(-a-e)(-a-b)(-b-c)(-c-d)}{(a+b)(b+c)(c+d)(d+e)(e+a)}$
$=(-1)^5=-1$，
故選(2)。

3. 【知識點】三角函數、指數與對數函數

【解析】$\sin 2x=\dfrac{1}{2}\log_\pi x^2 \Leftrightarrow \begin{cases} y=\sin 2x \\ y=\dfrac{1}{2}\log_\pi x^2=\log_\pi|x| \end{cases}$，

作圖如下：



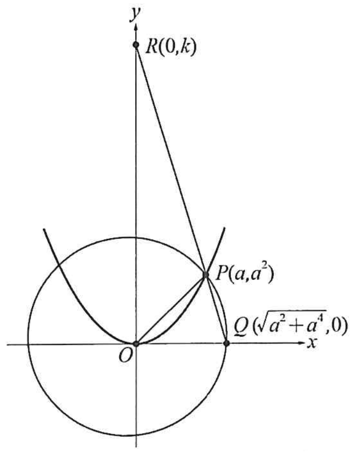

由圖可知 $y=\sin 2x$ 與 $y=\dfrac{1}{2}\log_\pi x^2$ 有 4 個交點，

所以方程式 $\sin 2x=\dfrac{1}{2}\log_\pi x^2$ 有 4 個實根，

故選(4)。

4. 【知識點】極限

【解析】




如圖所示，$\overleftrightarrow{PQ}$：$y=\dfrac{a^2}{a-\sqrt{a^2+a^4}}(x-\sqrt{a^2+a^4})$，
令 $R$ 點的坐標為 $R(0,k)$，$k$ 為實數。

則 $k=\dfrac{-a^2\sqrt{a^2+a^4}}{a-\sqrt{a^2+a^4}}$，

所求 $=\lim\limits_{a\to 0^+}\dfrac{-a^2\sqrt{a^2+a^4}}{a-\sqrt{a^2+a^4}}$

$=\lim\limits_{a\to 0^+}\dfrac{-a^2\sqrt{a^2+a^4}(a+\sqrt{a^2+a^4})}{a^2-(a^2+a^4)}$

$=\lim\limits_{a\to 0^+}\dfrac{-a^3\sqrt{a^2+a^4}-a^2(a^2+a^4)}{-a^4}$

$=\lim\limits_{a\to 0^+}\dfrac{-\sqrt{1+a^2}-(1+a^2)}{-1}=\dfrac{-2}{-1}=2$，

故選(3)。

### 二、多選題

5. 【知識點】矩陣

【解析】

$B=\begin{bmatrix}\cos 2\beta & \sin 2\beta \\ \sin 2\beta & -\cos 2\beta\end{bmatrix}$，$C=\begin{bmatrix}1 & 0 \\ 0 & -1\end{bmatrix}$，$D=\begin{bmatrix}-1 & 0 \\ 0 & 1\end{bmatrix}$，

(1) ○：$B^2=I$，$CD=\begin{bmatrix}-1 & 0 \\ 0 & -1\end{bmatrix} \Rightarrow (CD)^2=I=B^2$。

(2) ○：$CD$ 為逆時針旋轉 $180°$（$\pi$ 弳），
$A$ 為逆時針旋轉 $\alpha$ 角，所以 $CD=A^{\frac{\pi}{\alpha}}$。

(3) ×：$A^{-1}=\begin{bmatrix}\cos(-\alpha) & -\sin(-\alpha) \\ \sin(-\alpha) & \cos(-\alpha)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha\end{bmatrix}$。

(4) ○：$AB=\begin{bmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos 2\beta & \sin 2\beta \\ \sin 2\beta & -\cos 2\beta\end{bmatrix}$
$=\begin{bmatrix}\cos(\alpha+2\beta) & \sin(\alpha+2\beta) \\ \sin(\alpha+2\beta) & -\cos(\alpha+2\beta)\end{bmatrix}$，
為鏡射直線 $y=[\tan(\dfrac{\alpha}{2}+2\beta)]x$ 的鏡射矩陣。

(5) ×：$ABA^{-1}=\begin{bmatrix}\cos 4\beta & \sin 4\beta \\ \sin 4\beta & -\cos 4\beta\end{bmatrix}$，
為鏡射直線 $y=(\tan 2\beta)x$ 的鏡射矩陣。

故選(1)(2)(4)。

6. 【知識點】條件機率與貝氏定理

【解析】設甲桶內黑球有 $a$ 個，乙桶內黑球有 $b$ 個
（其中 $a,b$ 為整數，且 $0\le a\le 10$，$0\le b\le 15$）。

則 $\dfrac{a}{10}\times\dfrac{b}{15}=\dfrac{27}{50} \Rightarrow ab=81 \Rightarrow a=b=9$。

(1) ○：取出的兩顆球皆為白球的機率為 $\dfrac{1}{10}\times\dfrac{6}{15}=\dfrac{1}{25}$。

(2) × (3) ○：取出的兩顆球為一白一黑的機率為
$\dfrac{9}{10}\times\dfrac{6}{15}+\dfrac{1}{10}\times\dfrac{9}{15}=\dfrac{21}{50}$。

(4) ×：每回合取球情況可分為二黑球、一黑球一白球、二白球。三次取球可為
① 二黑球×2、二白球×1
$\Rightarrow C^3_2\times(\dfrac{27}{50})^2\times(\dfrac{1}{25})$。

② 二黑球×1、一黑球一白球×2

$\Rightarrow C_1^3\times(\frac{27}{50})\times(\frac{21}{50})^2$ 。

所求為①+②$=\frac{3^6\times55}{50^3}$ 。

(5) ×：期望值為$10\times(2\times\frac{1}{25}+1\times\frac{21}{50})=5$顆。

故選(1)(3)。

7. 【知識點】三角函數、二次曲線

【解析】考慮聯立方程式$\begin{cases}L_1: y=\tan(2\theta)x\\ L_2: y=-\tan\theta\cdot(x-3)\end{cases}$，

將$L_2$移項可得$\tan\theta=\frac{y}{3-x}$，

故$\frac{y}{x}=\tan2\theta=\frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}=\frac{\frac{2y}{3-x}}{1-(\frac{y}{3-x})^2}$

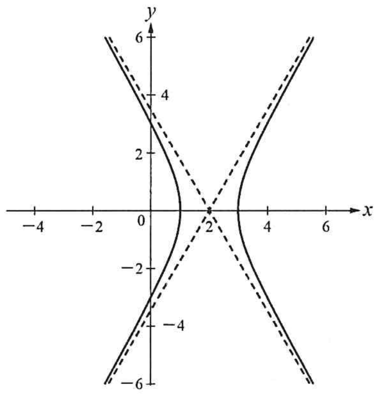
$=\frac{\frac{2y}{3-x}}{\frac{(3-x)^2-y^2}{(3-x)^2}}=\frac{2y}{\frac{(3-x)^2-y^2}{3-x}}$，

經整理後得到$y(3x^2-y^2-12x+9)=0$，

其中$3x^2-y^2-12x+9=0$，

即$\Gamma$：$\frac{(x-2)^2}{1}-\frac{y^2}{3}=1$ 為雙曲線。

繪圖可知選項(1)錯誤、(2)(3)(4)正確。




且$\Gamma$的漸近線方程式為$y-0=\pm\sqrt{3}(x-2)$，

故$\Gamma$與直線$\sqrt{3}x+y-2\sqrt{3}=0$不相交。

故選(2)(3)(4)(5)。

## 三、選填題

8. 【知識點】平面向量

【解析】由題意可知，$A,B,C$三點共線，

且$C$為圓心，$\overline{AB}$為圓的直徑，

所以$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=(\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{CA})\cdot(\overrightarrow{PC}-\overrightarrow{CA})=|\overrightarrow{PC}|^2-|\overrightarrow{CA}|^2$

$\geq[d(C,L_2)]^2-4=9-4=5$。

9. 【知識點】空間向量、空間中的平面與直線

【解析】令$\overrightarrow{OP}=m\overrightarrow{OB}+n\overrightarrow{OC}$，則$P$為平面$OBC$上的一點，

$\overrightarrow{OB}\times\overrightarrow{OC}=(6,-3,-6)$，取$\overrightarrow{n}=(2,-1,-2)$，

平面$OBC$的方程式為$2x-y-2z=0$，

所求$=|\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OP}|$的最小值$=|\overrightarrow{PA}|$的最小值

$=d(A,\text{平面}OBC)=5$。

10. 【知識點】直線與圓

【解析】$x^2+y^2+3y+k=0\Rightarrow x^2+(y+\frac{3}{2})^2=\frac{9}{4}-k$，

圓心$C(0,-\frac{3}{2})$，半徑$r=\sqrt{\frac{9}{4}-k}$，

圓到直線最近的距離為$d(C,L)-r=1$

$\Rightarrow\frac{|0+6+14|}{5}-\sqrt{\frac{9}{4}-k}=1\Rightarrow\sqrt{\frac{9}{4}-k}=3\Rightarrow k=-\frac{27}{4}$，

可得圓方程式為$x^2+y^2+3y-\frac{27}{4}=0$，

交$x$軸正向於$A(\frac{3\sqrt{3}}{2},0)$，交$y$軸正向於$B(0,\frac{3}{2})$，

又因為$\overline{AB}=3$，所以$\angle ACB=60°$，

故所求為$6\pi-\pi\times2=4\pi$。

11. 【知識點】多項式函數、微分

【解析】$f'(x)=ax^2-ax-2a=a(x+1)(x-2)$，

注意$f(-1)=\frac{37}{6}a+1$，$f(2)=\frac{5}{3}a+1$：

(1) 當$a>0$時，$f(1)$與$f(-2)$均為正數，
圖形不可能通過四個象限。

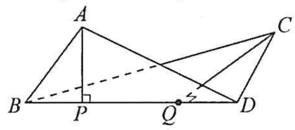
(2) 當$a<0$時，僅$f(-1)<0$且$f(2)>0$時，
圖形會通過四個象限，故得$\frac{-3}{5}<a<\frac{-6}{37}$。

## 第貳部分、混合題或非選擇題

12. 【知識點】空間向量

【解析】設$\overrightarrow{BA}$在平面$BCD$及直線$BD$的正射影為$\overrightarrow{BP}$，

作$\overline{CQ}\perp\overline{BD}$於$Q$點，




$\triangle ABD$的面積$=\frac{1}{2}\times$(矩形$ABCD$面積)$=150$

$\Rightarrow\frac{1}{2}\times\overline{BD}\times\overline{AP}=150\Rightarrow\overline{AP}=12\Rightarrow\overline{BP}=9$

$\Rightarrow\overline{PQ}=7$，(2分)

$|\overrightarrow{AC}|^2=|\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{QC}|^2$

$=|\overrightarrow{AP}|^2+|\overrightarrow{PQ}|^2+|\overrightarrow{QC}|^2+$

$2\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{PQ}+2\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{QC}+2\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{QC}$ (2分)

$=12^2+7^2+12^2+0+0+0=337$，(1分)

所以$\overline{AC}=\sqrt{337}$。(1分)

13. 【知識點】空間向量

【解析】

$|\overrightarrow{CB}\cdot(\overrightarrow{CA}\times\overrightarrow{CD})|$

$=\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB},\overrightarrow{CD}$所張成的平行六面體體積(1分)

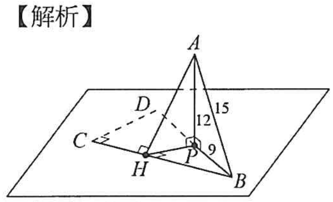
$=6\times$(四面體$A$-$BCD$體積)

$=6\times\frac{1}{3}\times150\times12$

$=3600$。(3分)

14. 【知識點】空間向量

【解析】




作$\overline{PH}\perp\overline{BC}$，則由三垂線定理知$\overline{AH}\perp\overline{BC}$，

且$\triangle BPH\sim\triangle BDC$，

所以$\frac{\overline{PH}}{\overline{CD}}=\frac{\overline{BP}}{\overline{BD}}\Rightarrow\frac{\overline{PH}}{15}=\frac{9}{25}\Rightarrow\overline{PH}=\frac{27}{5}$，(2分)

$d(A,\overleftrightarrow{BC})=\overline{AH}=\sqrt{\overline{AP}^2+\overline{PH}^2}=\frac{3}{5}\sqrt{481}$。(2分)

15. 【知識點】極限

【解析】$g(x)=\begin{cases} x^3-5x^2-13x+1, & -3\le x\le 2 \\ x^3-5x^2-8x+8, & 2<x\le 5 \end{cases}$

(1) $\lim\limits_{x\to 2^-} g(x)=\lim\limits_{x\to 2^-}(x^3-5x^2-13x+1)=-37$。(1 分)

(2) $\lim\limits_{x\to 2^+} g(x)=\lim\limits_{x\to 2^+}(x^3-5x^2-8x+8)=-20$。(1 分)

(3) $g(2)=-37$。(1 分)

16. 【知識點】微分

【解析】因為 $g(0)=1$，所以點 $P$ 在函數 $g(x)$ 的圖形上。

當 $-3<x<2$ 時，$g'(x)=3x^2-10x-13 \Rightarrow g'(0)=-13$，(2 分)

$\therefore$ 過點 $P(0,1)$ 的切線方程式為 $y=-13x+1$。(2 分)

17. 【知識點】微分

【解析】

(1) 當 $-3<x<2$，$g'(x)=3x^2-10x-13=(3x-13)(x+1)$

令 $g'(x)=0 \Rightarrow x=-1$ (1 分)

| $x$ | $-3$ | | $-1$ | | $2$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $g(x)$ | $-32$ | ↗ | $8$ | ↘ | $-37$ |

(極值判定，2 分)

(2) 當 $2<x<5$，$g'(x)=3x^2-10x-8=(3x+2)(x-4)$

令 $g'(x)=0 \Rightarrow x=4$ (1 分)

| $x$ | $2^+$ | | $4$ | | $5$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $g(x)$ | $-20^+$ | ↘ | $-40$ | ↗ | $-32$ |

(極值判定，2 分)

由(1)(2)知，$g(x)$ 的最大值為 8，最小值為 $-40$。(1 分)