

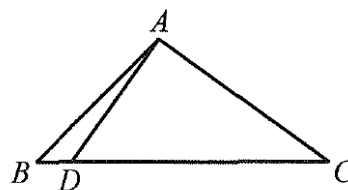
全國公私立 113 學年度分科測驗第七次數學甲(南一)

第壹部分：選擇題(占 76 分)

一、單選題(占 18 分)



1. 如圖(1)所示，已知有一 $\triangle ABC$ ， $\overline{AB} = 5$ 、 $\overline{AC} = 7$ ，
 D 點在 $\overline{BC}$ 邊上， $\overline{AD} \perp \overline{AC}$ ， $\angle BAD = \theta$ ， $\sin \theta = \frac{1}{10}$ 。



圖(1)

試問 $\overline{BC}$ 的長度為何？

- (1) $\sqrt{67}$ (2) $\sqrt{72}$ (3) 9 (4) $\sqrt{91}$ (5) 10

2. 坐標平面上，雙曲線 Γ 的方程式為 $-\frac{(x-h)^2}{4^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1$ ，其中 $hk \neq 0$ 、 $a > 0$ 。若 Γ' 為將 Γ 平移後的圖形，且 Γ' 的中心為原點 O 。已知直線 L 為 Γ' 的漸近線，直線 L 通過點 $(1, 2)$ 。試問下列哪一個選項是 Γ 的實軸長？ (1) 4 (2) 8 (3) 12 (4) 16 (5) 20

3. 有 6 支冰淇淋，其中香草口味 2 支、巧克力口味 2 支、草莓口味 1 支、芒果口味 1 支(同口味的冰淇淋視為相同物)。現在將這 6 支冰淇淋分給甲、乙、丙、丁、戊五人，除了分給甲不同口味的 2 支外，其餘 4 人，1 人 1 支。試問共有多少種分法？
 (1) 72 (2) 78 (3) 96 (4) 108 (5) 126

二、多選題(占 40 分)

4. 一個問答遊戲，兩人一組，共同回答 6 個問題，每個問題有兩個選項，只有一個選項正確，若答對 5 題以上(含 5 題)即可獲得大獎。今甲、乙兩人一組，已知每一題甲、乙會的機率分別為 $\frac{1}{3}$ 、 $\frac{1}{4}$ 。假設只要甲、乙兩人至少有一個人會就答對；兩人都不會就共同亂猜一個選項，猜對與猜錯的機率相同，每一題答對與否皆為獨立事件。試選出正確的選項。
 (1) 若甲、乙兩人答到第 X 題才答錯一題，則 X 的期望值為 3 (2) 甲、乙兩人第 1 題和第 2 題至少答對一題的機率大於 0.9 (3) 甲、乙兩人 6 題都答對的機率小於第 1 題答錯的機率 (4) 甲、乙兩人回答 6 個問題，答對題數的期望值不小於 5 題
 (5) 甲、乙兩人獲得大獎的機率為 $\frac{2187}{4096}$

5. 已知 n 、 m 均為正整數， $z_n = (\cos 36^\circ + i \sin 36^\circ)^n$ ， $c_m = 3(\cos 40^\circ + i \sin 40^\circ)^m$ ，其中 $i = \sqrt{-1}$ ， $d(n, m) = |z_n - c_m|$ 。試選出正確的選項。

- (1) $d(5, 3) = \sqrt{5}$ (2) $d(1, 1) = d(9, 8)$ (3) $d(3, 1) = d(4, 2)$
 (4) $d(n, m)$ 的最小值為 $d(1, 1)$ 之值 (5) $d(n, m)$ 的最大值為 $d(5, 9)$ 之值

6. 坐標空間中，平面 E 上有一 $\triangle ABC$ ， $\overline{AQ}$ 為 $\triangle ABC$ 之邊 $\overline{BC}$ 的高。 D 點不在平面 E 上， P 點在 $\overline{AQ}$ 上，且 $\overline{DP}$ 垂直於平面 E 。已知 $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = (2, 6, -4)$ 、 $\overrightarrow{AD} = (8, 8, -5)$ 。試選出正確的選項。
 (1) $|\overrightarrow{AC} \cdot (\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD})| = 42$ (2) 四面體 $ABCD$ 的體積為 28 (3) $\triangle ABC$ 的面積為 $\sqrt{14}$ (4) $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AP} = 27$ (5) $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC} = 5$

7. 若 π 為圓周率。試選出正確的選項。

- (1) $y = \cos(\frac{\pi}{4}x - \pi)$ 的圖形和 $y = \sin(\frac{\pi}{4}x + \frac{1}{2}\pi)$ 的圖形重合

(2) $y = |\cos(\frac{\pi}{4}x - \pi)|$ 的圖形週期為 4 (3) y 軸為 $y = \log_5(|x| - 1)$ 的圖形的漸近線

(4) 方程式 $|\cos(\frac{\pi}{4}x - \pi)| = \log_5(|x| - 1)$ 在 4 與 5 之間有實數解

(5) 方程式 $|\cos(\frac{\pi}{4}x - \pi)| = \log_5(|x| - 1)$ 只有兩個相異實數解

8. 分別取數列 $\langle a_n \rangle$ 的奇數項與偶數項成兩個新數列 $\langle b_n \rangle$ 與 $\langle c_n \rangle$ ，即 $b_n = a_{2n-1}$ 、 $c_n = a_{2n}$ (其中 n 為正整數)。已知 $\langle b_n \rangle$ 為等比數列、 $\langle c_n \rangle$ 為等差數列。試選出正確的選項。

(1) 若 $b_1 = 10$ 且 $\langle b_n \rangle$ 收斂，則 $b_2 < b_1$ (2) 若 $\langle b_n \rangle$ 、 $\langle c_n \rangle$ 均收斂，則 $\langle a_n \rangle$ 收斂

(3) 若 $a_1 = b_1 = 200$ 、 $a_2 = c_1 = 100$ ，則 $\langle a_n \rangle$ 可能收斂 (4) 若 $a_1 = b_1 = 200$ 、 $a_2 = c_1 = 0$ ，則 $\langle a_n \rangle$ 可能收斂 (5) 若 $a_1 = b_1 = 200$ 、 $a_2 = c_1 = 200$ ，則 $\langle a_n \rangle$ 可能收斂

三、選填題(占 18 分)

9. 設 $a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, l$ 均為實數。已知矩陣 $P = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ ， $\begin{bmatrix} e & f \\ 1 & 2 \end{bmatrix} P = \begin{bmatrix} g & h \\ 0 & 11 \end{bmatrix}$ ，

$\begin{bmatrix} i & j \\ 2 & 6 \end{bmatrix} P = \begin{bmatrix} k & l \\ 6 & 0 \end{bmatrix}$ ，則聯立方程組 $\begin{cases} ax + by = 3 \\ cx + dy = 4 \end{cases}$ 的解為 $x = \underline{\hspace{2cm}}$ ， $y = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

10. 坐標平面上，設 Γ 為以原點為圓心的圓， A 點為 Γ 與 y 軸的其中一個交點， $\overline{AB}$ 為 Γ 上的弦且與 x 軸交於 P 點。已知 $\overline{AB}$ 的斜率為 -3 且 $\overline{PA} = 10$ ，則 $\overline{AB} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

11. 坐標平面上，有圓 $C: (x-2)^2 + (y-4)^2 = 4$ 與 $A(5, 7)$ 、 $B(8, 7)$ 、 $O(0, 0)$ 三點。若 Q 點、 R 點分別為圓 C 與 $\overline{AB}$ 上的動點，則滿足所有 $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{OR}$ 的 P 點所成圖形的面積為 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。

第貳部分：混合題或非選擇題(占 24 分)

12 至 14 題為題組

坐標空間中，有一個四面體 $ABCD$ ， $A(1, 1, 0)$ ， $\overline{AD} = 6$ ， $\overline{AB}$ 、 $\overline{AC}$ 、 $\overline{AD}$ 兩兩互相垂直。已知包含 $\triangle ABC$ 的平面為 $E: 2x - y + 2z = 1$ ， $\overline{BC}$ 的方程式為 $\begin{cases} x - az = 4a + 7 \\ y = b \end{cases}$ ，其中 a 、 b 均為非零實數。根據上述，試回答下列問題。

12. 若 D 點坐標為 (m, n, r) ，且 $m > 0$ ，試求 D 點坐標。(非選擇題，4 分)

13. 試求數對 (a, b) 。(非選擇題，4 分)

14. 試求出平面 BCD 的方程式(寫成 $x + py + qz = t$ 的形式)。(非選擇題，4 分)

15 至 17 題為題組

坐標平面上，設三次函數 $f(x) = -x^3 + ax^2 + bx + c$ ，其中 a 、 b 、 c 均為實數。若 $f(2) = f''(2) = 0$ ， $y = f(x)$ 的圖形與 x 軸交於三點，由左至右分別為 A 、 B 、 C 三點，且 $\overline{AC} = 2$ 。根據上述，試回答下列問題。

15. 三次函數 $y = f(x)$ 圖形的反曲點為_____。(選填題，2 分)

16. 若 $f(x)$ 在 $x = h$ 有極小值，在 $x = k$ 有極大值，試求數對 (h, k) 。(非選擇題，5 分)

17. 若 $y = f(x)$ 的圖形與 x 軸圍出兩個封閉區域，這兩個封閉區域繞 x 軸旋轉所得的旋轉體體積為 M 。小甲發現，若將 $y = f(x)$ 的圖形做適當的平移，那麼求 M 值的計算將簡化。試求 M 值。(非選擇題，5 分)

參考數值： $\sqrt{2} \approx 1.414, \sqrt{3} \approx 1.732, \sqrt{5} \approx 2.236, \sqrt{6} \approx 2.449, \pi \approx 3.142$

對數值： $\log 2 \approx 0.3010, \log 3 \approx 0.4771, \log 5 \approx 0.6990, \log 7 \approx 0.8451$

RA6119 全國公私立 113 學年度分科測驗第七次數學甲(南一)

參考答案

選擇題：1.(3) 2.(4) 3.(2) 4.(2)(3)(5) 5.(2)(5) 6.(3)(4) 7.(2)(4) 8.(4)(5)

選填題：9. $x = 5, y = 1$ 10.18 11. $12 + 4\pi$

混合題或非選擇題：12. $D(5, -1, 4)$ 13. $(a, b) = (-1, 5)$ 14. $x + y + z = 8$

15. $(2, 0)$ 16. $(h, k) = (\frac{6 - \sqrt{3}}{3}, \frac{6 + \sqrt{3}}{3})$ 17. $\frac{16}{105}\pi$