

1	2	3	4	5	6	7	8	9-1	9-2	10-1	10-2	11-1	11-2	11-3
3	4	2	235	25	34	24	45	5	1	1	8	1	2	4
12	13	14	15-1	15-2	16	17								
			2	0										

第壹部分、選擇(填)題

一、單選題

1. 【知識點】三角比

【解析】 $\cos \angle BAC = \cos(90^\circ + \theta) = -\sin \theta = -\frac{1}{10}$,

$$\overline{BC}^2 = 5^2 + 7^2 - 2 \times 5 \times 7 \cos \angle BAC = 81 \Rightarrow \overline{BC} = 9,$$

故選(3)。

2. 【知識點】二次曲線

【解析】 $\Gamma': -\frac{x^2}{4^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1 \Rightarrow$ 漸近線斜率 $\pm \frac{a}{4}$,

$$\text{直線 } L \text{ 過點 } (0,0)、(1,2) \Rightarrow \text{直線斜率 } 2 = \frac{a}{4}$$

$$\Rightarrow a=8 \Rightarrow \text{實軸長 } 2a=16,$$

故選(4)。

3. 【知識點】排列組合與機率

【解析】甲得香草 1 支、巧克力 1 支：有 $4! = 24$ 種分法，
甲得香草或巧克力 1 支、草莓或芒果 1 支：

$$\text{有 } \frac{(2 \times 2) \times 4!}{\text{甲的分法數} \times \text{乙丙丁戊的分法數}} = 48 \text{ 種分法，}$$

$$\text{甲得草莓 1 支、芒果 1 支：有 } \frac{4!}{2!2!} = 6 \text{ 種分法，}$$

$$\text{共有 } 24 + 48 + 6 = 78 \text{ 種分法，}$$

故選(2)。

二、多選題

4. 【知識點】分布與統計

【解析】

(1) $\times$ ：甲、乙兩人每題答錯的機率為

$$\frac{2}{3} \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \Rightarrow X \sim G\left(\frac{1}{4}\right) \Rightarrow X \text{ 的期望值為 } 4。$$

(2) $\circ$ ： P (甲、乙兩人第 1 題和第 2 題至少答對一題)

$$= 1 - P(\text{甲、乙兩人第 1 題和第 2 題均答錯})$$

$$= 1 - \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{15}{16} > 0.9。$$

(3) $\circ$ ： P (甲、乙兩人 6 題都答對) $= \left(\frac{3}{4}\right)^6 = \frac{729}{4096}$ ；

$$P(\text{甲、乙兩人第 1 題答錯}) = \frac{1}{4} = \frac{1024}{4096}；$$

$$P(\text{甲、乙兩人 6 題都答對}) < P(\text{甲、乙兩人第 1 題答錯})。$$

(4) $\times$ ：甲、乙兩人回答 6 個問題，答對 Y 題

$$\Rightarrow Y \sim B\left(6, \frac{3}{4}\right) \Rightarrow Y \text{ 的期望值為 } 6 \times \frac{3}{4} = 4.5 < 5。$$

(5) $\circ$ ： P (甲、乙兩人獲得大獎)

$$= P(\text{答對 5 題}) + P(\text{答對 6 題})$$

$$= C_5^6 \left(\frac{3}{4}\right)^5 \times \frac{1}{4} + \left(\frac{3}{4}\right)^6 = \frac{2187}{4096}。$$

故選(2)(3)(5)。

5. 【知識點】複數平面

【解析】

$$(1) \times : d(5, 3) = |z_5 - c_3| = [1, 180^\circ] \text{ 和 } [3, 120^\circ] \text{ 的距離}$$

$$= \sqrt{1^2 + 3^2 - 2 \times 1 \times 3 \cos 60^\circ} = \sqrt{7}。$$

$$(2) \circ : d(1, 1) = |z_1 - c_1| = [1, 36^\circ] \text{ 和 } [3, 40^\circ] \text{ 的距離}$$

$$= \sqrt{1^2 + 3^2 - 2 \times 1 \times 3 \cos 4^\circ}，$$

$$d(9, 8) = |z_9 - c_8| = [1, 324^\circ] \text{ 和 } [3, 320^\circ] \text{ 的距離}$$

$$= \sqrt{1^2 + 3^2 - 2 \times 1 \times 3 \cos 4^\circ}。$$

$$(3) \times : d(3, 1) = |z_3 - c_1| = [1, 108^\circ] \text{ 和 } [3, 40^\circ] \text{ 的距離}$$

$$= \sqrt{1^2 + 3^2 - 2 \times 1 \times 3 \cos 68^\circ}，$$

$$d(4, 2) = |z_4 - c_2| = [1, 144^\circ] \text{ 和 } [3, 80^\circ] \text{ 的距離}$$

$$= \sqrt{1^2 + 3^2 - 2 \times 1 \times 3 \cos 64^\circ}。$$

(4) $\times$ ： $d(n, m)$ 的最小值為 $d(10, 9)$ 之值，其中

$$d(10, 9) = |z_{10} - c_9| = [1, 360^\circ] \text{ 和 } [3, 360^\circ] \text{ 的距離}$$

$$= \sqrt{1^2 + 3^2 - 2 \times 1 \times 3 \cos 0^\circ} = 2。$$

(5) $\circ$ ： $d(n, m)$ 的最大值為 $d(5, 9)$ 之值，其中

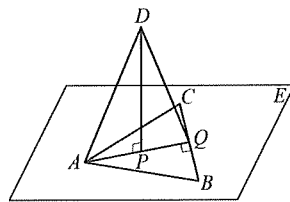
$$d(5, 9) = |z_5 - c_9| = [1, 180^\circ] \text{ 和 } [3, 360^\circ] \text{ 的距離}$$

$$= \sqrt{1^2 + 3^2 - 2 \times 1 \times 3 \cos 180^\circ} = 4。$$

故選(2)(5)。

6. 【知識點】空間向量

【解析】依題意作圖如下：



$$(1) \times : |\vec{AC} \cdot (\vec{AB} \times \vec{AD})|$$

$$= \vec{AB}、\vec{AC}、\vec{AD} \text{ 所圍的平行六面體體積}$$

$$= |\vec{AD} \cdot (\vec{AB} \times \vec{AC})|$$

$$= |(8, 8, -5) \cdot (2, 6, -4)| = 84。$$

(2) $\times$ ：四面體 $ABCD$ 的體積

$$= \frac{1}{6} |\vec{AD} \cdot (\vec{AB} \times \vec{AC})| = \frac{1}{6} \times 84 = 14。$$

(3) $\circ$ ： $\triangle ABC$ 的面積

$$= \frac{1}{2} |\vec{AB} \times \vec{AC}| = \frac{1}{2} |(2, 6, -4)| = \sqrt{14}。$$

(4) $\circ$ ： $\overline{AD} = |\vec{AD}| = \sqrt{153}$ ，

$$\text{四面體 } ABCD \text{ 的體積} = \frac{1}{3} (\triangle ABC \text{ 面積}) \times \overline{PD}$$

$$\Rightarrow \overline{PD} = \sqrt{126} \Rightarrow \overline{AP} = \sqrt{27}，$$

$$\vec{AD} \cdot \vec{AP} = \overline{AP}^2 = 27。$$

(5) $\times$ ：由三垂線定理可知 $\overline{DQ} \perp \overline{BC}$ ，又 $\overline{AQ} \perp \overline{BC}$

$$\Rightarrow \overline{BC} \perp \text{平面 } QAD \Rightarrow \overline{BC} \perp \overline{AD} \Rightarrow \vec{AD} \cdot \vec{BC} = 0。$$

故選(3)(4)。

7. 【知識點】三角函數、指數與對數函數

【解析】

$$(1) \times : y = \cos\left(\frac{\pi}{4}x - \pi\right) = -\cos\frac{\pi}{4}x \text{ 和}$$

$$y = \sin\left(\frac{\pi}{4}x + \frac{1}{2}\pi\right) = \cos\frac{\pi}{4}x \text{ 兩圖形不重合。}$$

$$(2) \circ : y = \left|\cos\left(\frac{\pi}{4}x - \pi\right)\right| \text{ 的圖形週期為 } \frac{\pi}{\frac{\pi}{4}} = 4。$$

- (3) $\times$: $y = \log_5(|x|-1) \Rightarrow |x|-1 > 0 \Rightarrow x > 1$ 或 $x < -1$,
 $x=1$ 與 $x=-1$ 為圖形 $y = \log_5(|x|-1)$ 的漸近線。
 (4) $\bigcirc$ (5) $\times$:

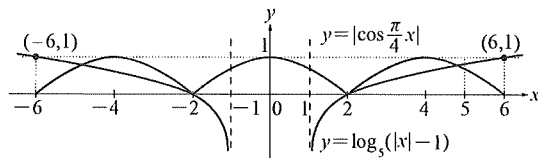
方程式 $|\cos(\frac{\pi}{4}x - \pi)| = \log_5(|x|-1)$ 的解, 即

$y = |\cos(\frac{\pi}{4}x - \pi)| = |\cos \frac{\pi}{4}x|$ 與 $y = \log_5(|x|-1)$

兩圖形交點的 x 坐標。

作 $y = |\cos(\frac{\pi}{4}x - \pi)| = |\cos \frac{\pi}{4}x|$ 與 $y = \log_5(|x|-1)$

兩圖形, 如下:



因為 $y = |\cos \frac{\pi}{4}x|$ 過點 $(4, 1)$ 、 $(5, \frac{\sqrt{2}}{2}) = (5, 0.7\cdots)$

$y = \log_5(|x|-1)$ 過點 $(4, \log_5 3)$ 、 $(5, \log_5 4) = (5, 0.8\cdots)$

所以方程式 $|\cos(\frac{\pi}{4}x - \pi)| = \log_5(|x|-1)$

在 4 與 5 之間有實數解,

且方程式 $|\cos(\frac{\pi}{4}x - \pi)| = \log_5(|x|-1)$

共有四個相異實數解。

故選(2)(4)。

8. 【知識點】數列與級數、極限

【解析】設數列 $\langle b_n \rangle$ 的公比為 r , 數列 $\langle c_n \rangle$ 的公差為 d ,

(1) $\times$: $b_1 = 10$, $r = 1$ 時 $\langle b_n \rangle$ 收斂, 但是 $b_2 = b_1$ 。

(2) $\times$: $b_1 = 10$, $r = 1$; $c_1 = 5$, $d = 0$ 時 $\langle b_n \rangle$ 、 $\langle c_n \rangle$ 均收斂, 但是數列 $\langle a_n \rangle$ 發散。

(3) $\times$: $b_1 = 200$ 且 $\langle b_n \rangle$ 收斂, 則 $-1 < r \leq 1$, $r \neq 0$, 此時 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ 不是 0 就是 200;

$c_1 = 100$ 且 $\langle c_n \rangle$ 收斂, 則 $d = 0$,

此時 $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = 100$, 故 $\langle a_n \rangle$ 不可能收斂。

註: 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n$, 則 $\langle a_n \rangle$ 收斂。

(4) $\bigcirc$: $b_1 = 200$, $r = 0.5$; $c_1 = 0$, $d = 0$ 時 $\langle a_n \rangle$ 收斂。

(5) $\bigcirc$: $b_1 = 200$, $r = 1$; $c_1 = 200$, $d = 0$ 時 $\langle a_n \rangle$ 收斂。

故選(4)(5)。

三、選填題

9. 【知識點】矩陣

【解析】依題意得 $\begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} P = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 11 \end{bmatrix}$

$$\Rightarrow P = \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 11 \end{bmatrix} = \frac{1}{4-6} \begin{bmatrix} 2 & -6 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 11 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -6 & 33 \\ 3 & -11 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix},$$

$$\begin{cases} ax + by = 3 \\ cx + dy = 4 \end{cases} \text{ 即 } \begin{cases} -6x + 33y = 3 \\ 3x - 11y = 4 \end{cases} \Rightarrow x = 5, y = 1.$$

10. 【知識點】直線與圓

【解析】

依題意, 在不失一般性下作圖如右,

其中 $\overline{OC} \perp \overline{AB}$ 於 C 點,

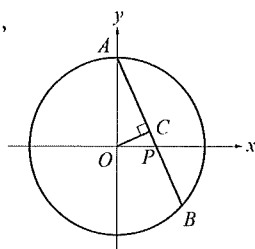
由直線 AB 的斜率為 -3 ,

得 $\overline{OP} : \overline{OA} = 1 : 3$,

又 $\overline{PA} = 10$

$\Rightarrow \overline{OP} = \sqrt{10}$ 、 $\overline{OA} = 3\sqrt{10}$

$\Rightarrow \overline{AC} = 9 \Rightarrow \overline{AB} = 18$ 。

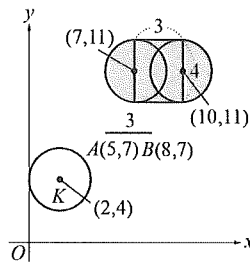


11. 【知識點】直線與圓、平面向量

【解析】圓 C 為圓心 $K(2, 4)$ 、半徑 2 的圓,

$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{OR}$, 依向量加法的操作:

當 R 點為 A 點, Q 點為圓 C 的每一個點, 所對應到的 P 點為圓心 $(7, 11)$ 、半徑為 2 的圓 U 的每一個點。同理, 當 R 點為 B 點, 則為圓心 $(10, 11)$ 、半徑為 2 的圓 V 。故當 R 點由 A 點滑至 B 點, 所對應到的 P 點為圓 U 滑至圓 V , 可得 P 點所成圖形為下圖陰影區域, 所求面積 $= 3 \times 4 + 2^2 \pi = 12 + 4\pi$ 。



第貳部分、混合題或非選擇題

12. 【知識點】空間中的平面與直線

【解析】取平面 E 的法向量為 $\vec{n} = (2, -1, 2)$, $\vec{n} \parallel \overrightarrow{AD}$ 。

設 $\overrightarrow{AD} = k(2, -1, 2)$ 又 $A(1, 1, 0)$

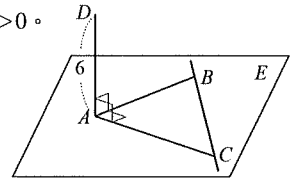
$\Rightarrow D(2k+1, -k+1, 2k)$, $2k+1 > 0$ 。

$|\overrightarrow{AD}|^2 = 6^2$

$\Rightarrow k^2[2^2 + (-1)^2 + 2^2] = 6^2$

$\Rightarrow k = \pm 2$ (取正)

$\Rightarrow D(5, -1, 4)$ 。(4 分)



13. 【知識點】空間中的平面與直線

【解析】直線 BC 的方程式為 $\begin{cases} \frac{x-7}{a} = \frac{z+4}{1} \\ y = b \end{cases}$,

$\vec{v} = (a, 0, 1)$ 為方向向量, 點 $P(7, b, -4)$ 在其上,

由 $\vec{n} \cdot \vec{v} = 0 \Rightarrow (2, -1, 2) \cdot (a, 0, 1) = 0$, 得 $a = -1$, (2 分)

$P(7, b, -4)$ 在平面 $E: 2x - y + 2z = 1$ 上, 得 $b = 5$, (2 分)

故數對 $(a, b) = (-1, 5)$ 。

14. 【知識點】空間中的平面與直線

【解析】 $P(7, 5, -4) \Rightarrow \overrightarrow{DP} = (2, 6, -8)$

$\Rightarrow \overrightarrow{DP} \times \vec{v} = (2, 6, -8) \times (-1, 0, 1) = 6(1, 1, 1)$ 。

取 $(1, 1, 1)$ 為平面 BCD 的法向量

$\Rightarrow$ 平面 BCD 的方程式為 $x + y + z = 8$ 。(4 分)

15. 【知識點】微分

【解析】

由 $f(2) = f''(2) = 0$ 可知 $y = f(x)$ 圖形的反曲點 (即中心) 為 $(2, 0)$ 。

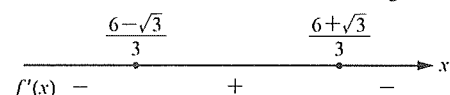
16. 【知識點】微分

【解析】 $y = f(x)$ 圖形的中心 (即反曲點) 為 $(2, 0)$ 在 x 軸上,

依中心性質及 $\overline{AC} = 2$ 知 $A(1, 0)$ 、 $B(2, 0)$ 、 $C(3, 0)$

$\Rightarrow f(x) = -(x-1)(x-2)(x-3) = -x^3 + 6x^2 - 11x + 6$ (2 分)

$f'(x) = -3x^2 + 12x - 11 = -3(x - \frac{6-\sqrt{3}}{3})(x - \frac{6+\sqrt{3}}{3})$



故 $f(x)$ 在 $x = \frac{6-\sqrt{3}}{3}$ 有極小值, 在 $x = \frac{6+\sqrt{3}}{3}$ 有極大值 (3 分)

$\Rightarrow$ 數對 $(h, k) = (\frac{6-\sqrt{3}}{3}, \frac{6+\sqrt{3}}{3})$ 。

17. 【知識點】積分

【解析】將 $y=f(x)$ 的圖形左移 2 單位後為

$y=-(x+1)(x)(x-1)=-x^3+x$ ，與 x 軸交於 $(-1,0)$ 、 $(0,0)$ 、 $(1,0)$ 三點，其中 $(0,0)$ 為中心。

故 $y=-x^3+x$ 與 x 軸圍出兩個全等的封閉區域，其繞 x 軸旋轉所得的旋轉體體積等於 M ，即

$$\begin{aligned} M &= 2 \int_0^1 \pi (-x^3 + x)^2 dx = 2\pi \int_0^1 (x^6 - 2x^4 + x^2) dx \\ &= 2\pi \left(\frac{1}{7}x^7 - \frac{2}{5}x^5 + \frac{1}{3}x^3 \right) \Big|_0^1 = \frac{16}{105}\pi \text{ (5分)} \end{aligned}$$