

北北基高級中等學校 113 學年度分科模擬考數學甲(113-E7)

第壹部分：選擇題(占 76 分)

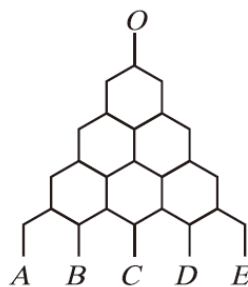


一、單選題(占 18 分)

1. 有一個 $\triangle ABC$ 公園， $\overline{AB} = \sqrt{5}$ ， $\overline{BC} = \sqrt{3}$ ， $\overline{CA} = 2$ ，想要用最小直徑 k 的圓形柵欄把公園圍起來，基於圓內以直徑為最大的弦，已知 $k^2 \geq (\sqrt{5})^2 = 5$ ，那麼 k^2 是介於下列哪兩數之間呢？ (1) 5.3，5.4 之間 (2) 5.4，5.5 之間 (3) 5.5，5.6 之間 (4) 5.6，5.7 之間 (5) 5.7，5.8 之間
2. 平行四邊形 $ABCD$ 中，已知 $|\overrightarrow{AB}| = 7$ ， $|\overrightarrow{AD}| = 3$ ，則 $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD}$ 的值為何？ (1) 21 (2) -21 (3) 40 (4) -40 (5) 58
3. 已知 P 為橢圓 $\Gamma: \frac{x^2}{72} + \frac{y^2}{81} = 1$ 上的一個動點，設 $A(3, 1)$ 且 F 為橢圓的其中一個焦點(在 x 軸上方)，滿足 $\overline{PA} + \overline{PF}$ 為整數的動點 P 有幾個？ (1) 18 個 (2) 19 個 (3) 20 個 (4) 21 個 (5) 22 個

二、多選題(占 40 分)

4. 實驗室培養兩種菌 A 、 B ，令 $\langle a_n \rangle$ 、 $\langle b_n \rangle$ 分別代表 A 、 B 兩種培養菌在時間點 n 的數量，發現有以下的關係： $a_{n+1} = 3a_n + 2b_n$ ， $b_{n+1} = 5b_n$ ，其中 $n = 0, 1, 2, \dots$ 。已知 $a_0 = b_0 = 1$ ，請選出正確的選項。(1) $a_1 = 5$ (2) $a_2 = 10$ (3) $b_3 = 125$ (4) $a_{10} > b_{10}$ (5) $a_{10} < 10^7$
5. 夜市的彈珠臺遊戲如右圖，彈珠均由入口 O 進入，從 A 、 B 、 C 、 D 、 E 這 5 個出口掉出，已知彈珠在各分支處向右掉落的機率皆為向左掉落的 2 倍，請選出正確的選項。(1) 由入口 O 放入 1 顆彈珠，則彈珠從出口 E 掉出的機率最大 (2) 由入口 O 依次放入 81 顆彈珠，一次放 1 顆，則從出口 C 掉出的彈珠的數量期望值為 24 顆 (3) 由入口 O 依次放入若干顆彈珠，一次放 1 顆，直到有彈珠從出口 B 掉出所需的彈珠數量的期望值為 10.125 顆 (4) 由入口 O 依次放入 5 顆彈珠，一次放 1 顆，恰好從 A 、 B 、 C 、 D 、 E 各掉出一顆的機率為 $m \times (\frac{2}{3})^n$ (m 和 n 均為正整數)，則 $m + n = 23$ (5) 由入口 O 依次放入 81 顆彈珠，一次放 1 顆，則「從出口 C 掉出不大於 50 顆的彈珠」之機率加上「從非出口 C 的出口掉出不大於 30 顆的彈珠」之機率等於 1
6. $f(x) = |x-1| + |x-2| + |x-3| + |x-4|$ ，請選出正確的選項。(1) $f(x)$ 的最小值是產生在 $2 \leq x \leq 3$ 時 (2) $f(x)$ 的最小值為 4 (3) 已知 $f(x) = 5$ 有兩個解為 α 、 β ，且 $\alpha > \beta$ ，則 $\alpha - \beta = 2$ (4) $f(x) = 10000$ 有兩個解 (5) $f(1.11) = f(3.88)$
7. 關於下列敘述，請選出正確的選項。(1) $81^{\sqrt{7}} > 27^{\sqrt{13}}$ (2) $\frac{\log_4 27}{\log_2 9} = \frac{3}{4}$



(3) 在平面上，已知 $\triangle ABC$ 中， $\cos A = \frac{1}{3}$ ， $\cos B = \frac{1}{4}$ ，則 $\cos C = \frac{2\sqrt{30} - 1}{12}$

(4) 在空間中，已知直線 $L: \frac{x-1}{-6} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-3}{2}$ 與平面 $E: x + 2y + 2z = 3$ 平行，且兩者距離為 3 (5) 若五對夫妻隨機平分成五組跳舞，且每一組都是一男一女，則恰有兩組是夫妻的機率等於 $\frac{1}{6}$

8. 下列是有相關於 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt[3]{n^3 + 6n^2} - \sqrt{n^2 + n} \right)$ 的運算，請選出正確的選項。

(1) 若 $m = 10^{100}$ ，則 $m + 1.9999 < \sqrt[3]{m^3 + 6m^2} < m + 2.0001$

(2) 若 $m = 10^{1000}$ ，則 $\sqrt{m^2 + m} > m + 1.00001$ (3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt[3]{n^3 + 6n^2} - (n + 2) \right) = 0$

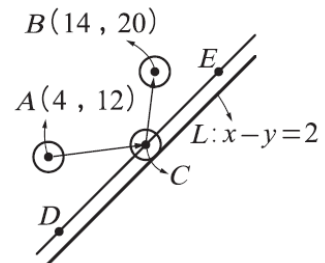
(4) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{n^2 + n} - (n + 0.5) \right) = 0.5$ (5) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt[3]{n^3 + 6n^2} - \sqrt{n^2 + n} \right) = 1.5$

三、選填題(占 18 分)

9. 設 n 為不大於 100 的自然數且 $i = \sqrt{-1}$ ，則滿足 $(\sin \theta + i \cos \theta)^n = \sin n\theta + i \cos n\theta$ 的所有 n 的値之總和為_____。

10. 已知空間中兩點 $A(4, 3, 2)$ 、 $B(2, 1, 4)$ ， P 點為平面 $E: x - 2y - 2z = -1$ 上的一點，則 $\overline{PA}^2 + \overline{PB}^2$ 的最小值為_____。

11. 在右圖中， $L: x - y = 2$ 為一個撞球檯的檯邊，有一個半徑為 $\sqrt{2}$ 的球，一開始球心在 $A(4, 12)$ 的位置，被球桿直線撞擊到球心 C 的位置時，此球碰到檯邊，再反彈走直線到達球心 $B(14, 20)$ 的位置，已知 $\overline{DE}$ 平行檯邊 L 且通過 C ， $\angle ACD = \angle BCE$ ，則 C 的 x 坐標為_____。(化為最簡分數)



第貳部分：混合題或非選擇題(占24分)

12-14 題為題組

今一袋中有大小相同的五顆紅球(編號 1~5)、三顆白球(編號 1~3)，若每顆球被選取的機會均等，一次取一球，取後不放回，連取兩次， X 為第一次取到紅球的事件， Y 為第二次取到紅球的事件，試回答下列問題。

12. $P(X|Y) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。(化為最簡分數)(選填題，3 分)

13. 已知取到兩球編號數字和為奇數，則第一次取到紅球的機率為_____。(化為最簡分數)(選填題，3 分)

14. 今有一遊戲為若兩次取球皆取出紅球可得 100 元，並且可放回再繼續重新開始取球。若同樣兩次取球皆取出紅球則可再得 100 元，直到取出不為兩顆紅球為止，試求所得獎金總額之期望值為何？(非選擇題，6 分)

15-17 題為題組

某砲車行駛於一公路上，且公路滿足 $\Gamma: y = x^3 - x$ ，若此時砲車在 $A_1(x_1, y_1)$ ，這時發現在他的正前方(由 A_1 對 Γ 作切線 L_1 的方向)有一臺敵方戰車剛好也在 Γ 上行駛到 $A_2(x_2, y_2)$ 的位置($x_2 \neq x_1$)準備射擊，試回答下列問題。

15. 試求出 x_1 與 x_2 的關係式。(非選擇題，4 分)

16. 通過 A_2 對 Γ 作切線 L_2 交 Γ 於 $A_3(x_3, y_3)$ 且 $x_3 \neq x_2$ ，通過 A_3 對 Γ 作切線 L_3 交 Γ 於 $A_4(x_4, y_4)$ 且 $x_4 \neq x_3$ ，通過 A_4 對 Γ 作切線 L_4 交 Γ 於 $A_5(x_5, y_5)$ 且 $x_5 \neq x_4$ ，通過 A_5 對 Γ 作切線 L_5 ，發現 L_5 是一條位於 x 軸上方的水平線，試求 $x_1 = \underline{\hspace{2cm}}$ 。
(化為最簡根式)(選填題，3 分)

17. 若 x_1 是負整數，試求 L_1 與 Γ 所圍成的區域扣除 x 軸下方部分區域(請畫出簡圖)，繞 x 軸所成的旋轉體體積的最小值，請寫出定積分的數學式子即可，不必算出答案。
(非選擇題，5 分)

參考數值： $\sqrt{2} \approx 1.414, \sqrt{3} \approx 1.732, \sqrt{5} \approx 2.236, \sqrt{6} \approx 2.449, \pi \approx 3.142$

對數值： $\log 2 \approx 0.3010, \log 3 \approx 0.4771, \log 5 \approx 0.6990, \log 7 \approx 0.8451$

參考答案

選擇題：1. (2) 2. (4) 3. (3) 4. (1)(3)(5) 5. (2)(3)(4)(5) 6. (1)(2)(3)(4) 7. (2)(3)(5)
8. (1)(3)(5)

選填題：9. 1225 10. 14 11. $\frac{92}{7}$

混合題或非選擇題：12. $\frac{4}{7}$ 13. $\frac{19}{30}$ 14. $\frac{500}{9}$

15. $2x_1 + x_2 = 0$ 16. $-\frac{\sqrt{3}}{48}$

17. $\int_{-1}^2 \pi(2x+2)^2 dx - \int_{-1}^0 \pi(x^3-x)^2 dx - \int_1^2 \pi(x^3-x)^2 dx$

