

114 年(113 學年度)高三下第七次 分科測驗模擬考數學(數甲)試題

俞克斌老師編寫

第壹部分：選擇(填)題

一、單選題

1. 有一個 $\triangle ABC$ 公園， $\overline{AB} = \sqrt{5}$ ， $\overline{BC} = \sqrt{3}$ ， $\overline{CA} = 2$ ，想要用最小直徑 k 的圓形柵欄把公園圍起來，基於圓內以直徑為最大的弦，已知 $k^2 \geq (\sqrt{5})^2 = 5$ ，那麼 k^2 是介於下列哪兩數之間呢？
 (1) 5.3，5.4 之間 (2) 5.4，5.5 之間 (3) 5.5，5.6 之間
 (4) 5.6，5.7 之間 (5) 5.7，5.8 之間

答：(2)

解： $\cos C = \frac{2^2 + (\sqrt{3})^2 - (\sqrt{5})^2}{2 \times 2 \times \sqrt{3}} = \frac{1}{2\sqrt{3}} \Rightarrow \sin C = \frac{\sqrt{11}}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{5}}{2R}$
 $\Rightarrow k^2 = (2R)^2 = \left(\frac{2\sqrt{15}}{\sqrt{11}} \right)^2 = \frac{60}{11} \doteq 5.4 \dots$

2. 平行四邊形 $ABCD$ 中，已知 $|\overrightarrow{AB}| = 7$ ， $|\overrightarrow{AD}| = 3$ ，則 $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD}$ 的值為何？
 (1) 21 (2) -21 (3) 40 (4) -40 (5) 58

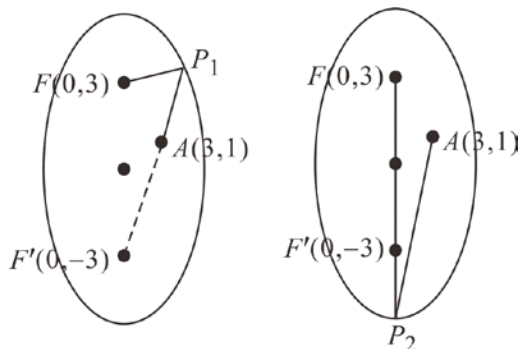
答：(4)

解： $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = [\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}] \cdot [\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}] = |\overrightarrow{AD}|^2 - |\overrightarrow{AB}|^2 = -40$

3. 已知 P 為橢圓 $\Gamma: \frac{x^2}{72} + \frac{y^2}{81} = 1$ 上的一個動點，設 $A(3,1)$ 且 F 為橢圓的其中一個焦點(在 x 軸上方)，滿足 $\overline{PA} + \overline{PF}$ 為整數的動點 P 有幾個？
 (1) 18 個 (2) 19 個 (3) 20 個 (4) 21 個 (5) 22 個

答：(3)

解： 直立型橢圓，中心 $(0,0)$ ， $a=9$ ， $b=6\sqrt{2} \Rightarrow c=3$



$$2a - \overline{AF'} \leq \overline{PA} + \overline{PF} \leq 2a + \overline{AF'}$$

$$\underbrace{18-5}_{13} \leq \underbrace{\overline{PA} + \overline{PF}}_{\in \mathbb{Z}} \leq \underbrace{18+5}_{23}$$

當 $\overline{PA} + \overline{PF} = 13, 23$ 時，各對立一點

當 $\overline{PA} + \overline{PF} = 14, 15, \dots, 22$ ，各對立 2 點

共 $2 \times 1 + 9 \times 2 = 20$ 個點

二、多選題

4. 實驗室培養兩種菌 A 、 B ，令 $\langle a_n \rangle$ 、 $\langle b_n \rangle$ 分別代表 A 、 B 兩種培養菌在時間點 n 的數量，發現有以下的關係： $a_{n+1} = 3a_n + 2b_n$ ， $b_{n+1} = 5b_n$ ，其中 $n = 0, 1, 2, \dots$ 。已知 $a_0 = b_0 = 1$ ，請選出正確的選項。

- (1) $a_1 = 5$ (2) $a_2 = 10$ (3) $b_3 = 125$ (4) $a_{10} > b_{10}$ (5) $a_{10} < 10^7$

答：(1)(3)(5)

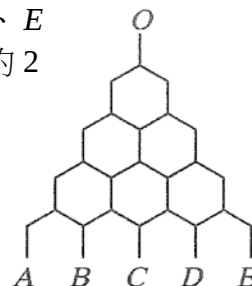
解： $\begin{bmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_n \\ b_n \end{bmatrix}$ ，故 $\begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \end{bmatrix}$

則 $\begin{bmatrix} a_2 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5^2 \\ 5^2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} a_3 \\ b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5^2 \\ 5^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5^3 \\ 5^3 \end{bmatrix}$

表 $\begin{bmatrix} a_n \\ b_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5^n \\ 5^n \end{bmatrix} \Rightarrow a^{10} = b^{10} = 5^{10} = \left(10^{\log 5}\right)^{10} = 10^{6.99} < 10^7$

5. 夜市的彈珠臺遊戲如右圖，彈珠均由入口 O 進入，從 A 、 B 、 C 、 D 、 E 這 5 個出口掉出，已知彈珠在各分支處向右掉落的機率皆為向左掉落的 2 倍，請選出正確的選項。

- (1) 由入口 O 放入 1 顆彈珠，則彈珠從出口 E 掉出的機率最大
 (2) 由入口 O 依次放入 81 顆彈珠，一次放 1 顆，則從出口 C 掉出的彈珠的數量期望值為 24 顆
 (3) 由入口 O 依次放入若干顆彈珠，一次放 1 顆，直到有彈珠從出口 B 掉出所需的彈珠數量的期望值為 10.125 顆
 (4) 由入口 O 依次放入 5 顆彈珠，一次放 1 顆，恰好從 A 、 B 、 C 、 D 、 E 各掉出一顆的機率為 $m \times \left(\frac{2}{3}\right)^n$ (m 和 n 均為正整數)，則 $m + n = 23$
 (5) 由入口 O 依次放入 81 顆彈珠，一次放 1 顆，則「從出口 C 掉出不大於 50 顆的彈珠」之機率加上「從非出口 C 的出口掉出不大於 30 顆的彈珠」之機率等於 1



答：(2)(3)(4)(5)

解：(1) $X \sim B\left(4, \frac{2}{3}\right)$

$$P(A) = P(X=0) = C_0^4 \left(\frac{1}{3}\right)^4 = \frac{1}{81},$$

$$P(B) = P(X=1) = C_1^4 \left(\frac{2}{3}\right) \left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{8}{81},$$

$$P(C) = P(X=2) = C_2^4 \left(\frac{2}{3}\right)^2 \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{24}{81},$$

$$P(D) = P(X=3) = C_3^4 \left(\frac{2}{3}\right)^3 \left(\frac{1}{3}\right) = \frac{32}{81},$$

$$P(E) = P(X=4) = C_4^4 \left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{16}{81}$$

$$(2) 81E(C) = 81 \times \frac{24}{81} = 24$$

$$(3) X \sim G\left(\frac{8}{81}\right) \Rightarrow E(B) = \frac{1}{\frac{8}{81}} = \frac{81}{8} = 10.125$$

$$(4) P(A)P(B)P(C)P(D)P(E) \times 5! = \frac{5!}{81^5} \times 1 \times 8 \times 24 \times 32 \times 16 = 5 \times \left(\frac{2}{3}\right)^{18}$$

(5) 從出口 C 掉出不大於 50 顆的彈珠之機率為

1 - 從出口 C 掉出 51 顆至 81 顆的彈珠之機率

= 1 - 從非出口 C 的出口掉出不大於 30 顆的彈珠之機率

6. $f(x) = |x-1| + |x-2| + |x-3| + |x-4|$ ，請選出正確的選項。

(1) $f(x)$ 的最小值是產生在 $2 \leq x \leq 3$ 時

(2) $f(x)$ 的最小值為 4

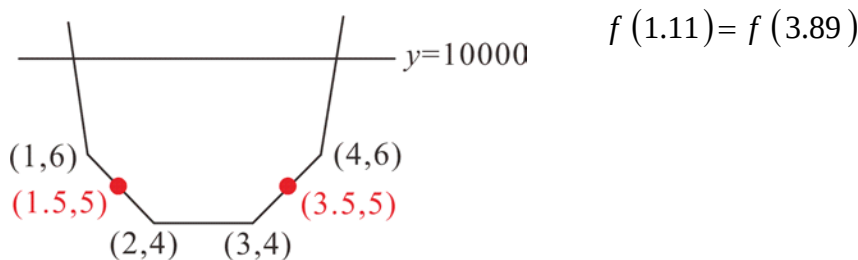
(3) 已知 $f(x) = 5$ 有兩個解為 α 、 β ，且 $\alpha > \beta$ ，則 $\alpha - \beta = 2$

(4) $f(x) = 10000$ 有兩個解

(5) $f(1.11) = f(3.88)$

答：(1)(2)(3)(4)

解：



7. 關於下列敘述，請選出正確的選項。

$$(1) 81\sqrt{7} > 27\sqrt{13}$$

$$(2) \frac{\log_4 27}{\log_2 9} = \frac{3}{4}$$

$$(3) \text{在平面上，已知 } \triangle ABC \text{ 中，} \cos A = \frac{1}{3}, \cos B = \frac{1}{4}, \text{ 則 } \cos C = \frac{2\sqrt{30}-1}{12}$$

(4) 在空間中，已知直線 $L: \frac{x-1}{-6} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-3}{2}$ 與平面 $E: x+2y+2z=3$ 平行，且兩者距離為 3

(5) 若五對夫妻隨機平分成五組跳舞，且每一組都是一男一女，則恰有兩組是夫妻的機率等於 $\frac{1}{6}$

答：(2)(3)(5)

解：(1) 左 = $3^4 \sqrt{7} = 3^{\sqrt{112}} < 27\sqrt{13} = 3^3 \sqrt{13} =$ 右

$$(2) \text{左} = \frac{\frac{3}{2} \log_2 3}{2 \log_2 3} = \frac{3}{4} = \text{右}$$

$$(3) \cos A = \frac{1}{3} \Rightarrow \sin A = \frac{\sqrt{8}}{3}, \cos B = \frac{1}{4} \Rightarrow \sin B = \frac{\sqrt{15}}{4}$$

$$\cos C = -\cos(A+B) = -\left[\frac{1}{3} \times \frac{1}{4} - \frac{\sqrt{8}}{3} \times \frac{\sqrt{15}}{4} \right] = \frac{2\sqrt{30}-1}{12}$$

$$(4) \vec{L} = (-6, 1, 2) \perp \vec{E} = (1, 2, 2), \text{點}(1, 2, 3) \notin E \Rightarrow L \parallel E$$

$$d(L, E) = d((1, 2, 3), E) = \frac{|1+4+6-3|}{\sqrt{1^2+2^2+2^2}} = \frac{8}{3}$$

$$(5) \frac{C_2^5 \times [1 \times 3! - 3 \times 2! + 3 \times 1! - 1 \times 0!]}{5!} = \frac{10 \times 2}{120} = \frac{1}{6}$$

8. 下列是有相關於 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt[3]{n^3 + 6n^2} - \sqrt{n^2 + n} \right)$ 的運算，請選出正確的選項。

$$(1) \text{若 } m = 10^{100}, \text{ 則 } m + 1.9999 < \sqrt[3]{m^3 + 6m^2} < m + 2.0001$$

$$(2) \text{若 } m = 10^{1000}, \text{ 則 } \sqrt{m^2 + m} > m + 1.00001$$

$$(3) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt[3]{n^3 + 6n^2} - (n+2) \right) = 0$$

$$(4) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{n^2 + n} - (n+0.5) \right) = 0.5$$

$$(5) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt[3]{n^3 + 6n^2} - \sqrt{n^2 + n} \right) = 1.5$$

答：(1)(3)(5)

$$\text{解：(1)} \because m = 10^{100} \quad \therefore (m+1.9999)^3 < m^3 + 6m^2 < (m+2.0001)^3$$

$$(2) \because m = 10^{1000} \quad \therefore (m+0.4999)^2 < m^2 + m < (m+0.5001)^2$$

$$(3) \text{承(1)}, n \rightarrow \infty, \sqrt[3]{n^3 + 6n^2} = n+2$$

$$(4) \text{承(2)}, n \rightarrow \infty, \sqrt{n^2 + n} = n+0.5$$

$$(5) \text{承(3)(4)}, n \rightarrow \infty, \sqrt[3]{n^3 + 6n^2} - \sqrt{n^2 + n} = 1.5$$

三、選填題

9. 設 n 為不大於 100 的自然數且 $i = \sqrt{-1}$ ，則滿足 $(\sin \theta + i \cos \theta)^n = \sin n\theta + i \cos n\theta$ 的所有 n

的值之總和為_____。

答：1225

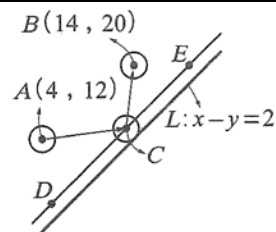
解：左 $=[\cos(90^\circ-\theta)+i\sin(90^\circ-\theta)]^n=\cos(90^\circ-n\theta)+i\sin(90^\circ-n\theta)=右$
 $\Rightarrow 90^\circ n-n\theta=90^\circ-n\theta+360^\circ k \Rightarrow n=4k+1, k \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}, 1 \leq n \leq 100$
 $\Rightarrow k=0, 1, 2, \dots, 24$ ，總和 $=1+5+9+\dots+97=\frac{98 \times 25}{2}=1225$

10. 已知空間中兩點 $A(4, 3, 2)$ 、 $B(2, 1, 4)$ ， P 點為平面 $E: x-2y-2z=-1$ 上的一點，則 $\overline{PA}^2 + \overline{PB}^2$ 的最小值為_____。

答：14

解： $\overline{AB}$ 中點 $M(3, 2, 3)$ 在平面 E 投影點 $P\left(\frac{11}{3}, \frac{2}{3}, \frac{5}{3}\right)$
 $\overline{PA}^2 + \overline{PB}^2$ 之 $Min = \left(\frac{-1}{3}\right)^2 + \left(\frac{-7}{3}\right)^2 + \left(\frac{-1}{3}\right)^2 + \left(\frac{5}{3}\right)^2 + \left(\frac{-1}{3}\right)^2 + \left(\frac{-7}{3}\right)^2 = 14$

11. 在右圖中， $L: x-y=2$ 為一個撞球檯的檯邊，有一個半徑為 $\sqrt{2}$ 的球，一開始球心在 $A(4, 12)$ 的位置，被球桿直線撞擊到球心 C 的位置時，此球碰到檯邊，再反彈走直線到達球心 $B(14, 20)$ 的位置，已知 $\overline{DE}$ 平行檯邊 L 且通過 C ， $\angle ACD = \angle BCE$ ，則 C 的 x 坐標為_____。（化為最簡分數）



答： $\frac{92}{7}$

解： $d(\overrightarrow{DE}, L) = \text{半徑} = \sqrt{2} \Rightarrow \overrightarrow{DE}: x-y=0$
 $A(4, 12)$ ，關於 $x-y=0$ 之對稱點 $A'(12, 4)$
 $\overrightarrow{A'B}: \begin{cases} x=12+2t \\ y=4+16t \end{cases}$ 與 $x-y=0$ 交於 $C\left(\frac{92}{7}, \frac{92}{7}\right)$

第貳部分：混合題或非選擇題

12-14 題為題組

今一袋中有大小相同的五顆紅球（編號 1~5）、三顆白球（編號 1~3），若每顆球被選取的機會均等，一次取一球，取後不放回，連取兩次， X 為第一次取到紅球的事件， Y 為第二次取到紅球的事件，試回答下列問題。

12. $P(X|Y) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。（化為最簡分數）

答： $\frac{4}{7}$

解： $P(X|Y) = \frac{P(X \cap Y)}{P(Y)} = \frac{\frac{5}{8} \times \frac{4}{7}}{\frac{5}{8}} = \frac{4}{7}$

13. 已知取到兩球編號數字和為奇數，則第一次取到紅球的機率為_____。
(化為最簡分數)

答： $\frac{19}{30}$

解： $\frac{\frac{3}{8} \times \frac{3}{7} + \frac{2}{8} \times \frac{5}{7}}{\frac{5}{8} \times \frac{3}{7} + \frac{3}{8} \times \frac{5}{7}} = \frac{19}{30}$

14. 今有一遊戲為若兩次取球皆取出紅球可得 100 元，並且可放回再繼續重新開始取球。若同樣兩次取球皆取出紅球則可再得 100 元，直到取出不為兩顆紅球為止，試求所得獎金總額之期望值為何？

答： $\frac{500}{9}$

解： 取出兩紅機率 $\frac{5}{8} \times \frac{4}{7} = \frac{5}{14}$ ，故非兩紅之機率 $1 - \frac{5}{14} = \frac{9}{14}$

$$E(X) = 100 \left(\frac{5}{14} \right) \left(\frac{9}{14} \right) + 200 \left(\frac{5}{14} \right)^2 \left(\frac{9}{14} \right) + 300 \left(\frac{5}{14} \right)^3 \left(\frac{9}{14} \right) + \dots$$

$$\frac{5}{14} E(X) = 100 \left(\frac{5}{14} \right)^2 \left(\frac{9}{14} \right) + 200 \left(\frac{5}{14} \right)^3 \left(\frac{9}{14} \right) + \dots$$

$$\text{相減} \Rightarrow \frac{9}{14} E(X) = 100 \left(\frac{5}{14} \right) \left(\frac{9}{14} \right) + 100 \left(\frac{5}{14} \right)^2 \left(\frac{9}{14} \right) + 100 \left(\frac{5}{14} \right)^3 \left(\frac{9}{14} \right) + \dots$$

$$\Rightarrow E(X) = \frac{100 \left(\frac{5}{14} \right)}{1 - \frac{5}{14}} = \frac{500}{9}$$

15-17 題為題組

某砲車行駛於一公路上，且公路滿足 $\Gamma: y = x^3 - x$ ，若此時砲車在 $A_1(x_1, y_1)$ ，這時發現在他的正前方（由 A_1 對 Γ 作切線 L_1 的方向）有一臺敵方戰車剛好也在 Γ 上行駛到 $A_2(x_2, y_2)$ 的位置（ $x_2 \neq x_1$ ）準備射擊，試回答下列問題。

15. 試求出 x_1 與 x_2 的關係式。

答： $2x_1 + x_2 = 0$

解： 切點 $A_1(x_1, y_1) = (x_1, x_1^3 - x_1)$

$$y' = 3x^2 - 1, \text{ 切線斜率 } m = y'|_{x=x_1} = 3x_1^2 - 1$$

$$\text{切線: } \left(y - x_1^3 + x_1 \right) = \left(3x_1^2 - 1 \right) (x - x_1)$$

$$\text{與 } y = x^3 - x \text{ 相交} \Rightarrow x^3 - 3x_1^2x + 2x_1^3 = 0$$

有三根 $x_1, x_1, x_2 \Rightarrow x_1 + x_1 + x_2 = 0 \Rightarrow 2x_1 + x_2 = 0$

16. 通過 A_2 對 Γ 作切線 L_2 交 Γ 於 $A_3(x_3, y_3)$ 且 $x_3 \neq x_2$,
 通過 A_3 對 Γ 作切線 L_3 交 Γ 於 $A_4(x_4, y_4)$ 且 $x_4 \neq x_3$,
 通過 A_4 對 Γ 作切線 L_4 交 Γ 於 $A_5(x_5, y_5)$ 且 $x_5 \neq x_4$,
 通過 A_5 對 Γ 作切線 L_5 , 發現 L_5 是一條位於 x 軸上方的水平線 ,
 試求 $x_1 =$ _____。(化為最簡根式)

答： $-\frac{\sqrt{3}}{48}$

解： 承上題， $x_2 = -2x_1 \Rightarrow x_3 = -2x_2 \Rightarrow x_4 = -2x_3 \Rightarrow x_5 = -2x_4$
 且 $y'|_{x=x_5} = 3x_5^2 - 1 = 0 \Rightarrow x_5 = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$ (取負， $\because y = x^3 - x > 0$)
 $\Rightarrow x_1 = \frac{1}{(-2)^4} \times \frac{-1}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{48}$

17. 若 x_1 是負整數，試求 L_1 與 Γ 所圍成的區域扣除 x 軸下方部分區域 (請畫出簡圖)，繞 x 軸所成的旋轉體體積的最小值，請寫出定積分的數學式子即可，不必算出答案。

答： 如詳解

解： 切線過 $(-1, 0)$ ，斜率 $m = y'|_{x=-1} = 2$ ，切線： $y = 2x + 2$

所求 $= \int_{-1}^2 \pi (2x+2)^2 dx - \int_{-1}^0 \pi (x^3 - x)^2 dx - \int_1^2 \pi (x^3 - x)^2 dx$

