臺北區高中 105 學年度第二學期指定科目第二次
聯合模擬考 數學甲

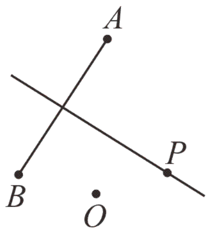
RA677

第壹部分：選擇題

一、單選題

1. 方程式 $\log(x+1)-\sin x=0$ 有多少個相異的實根？
(1) 3 個　(2) 4 個　(3) 5 個　(4) 6 個　(5) 7 個。

2. 如右圖，設 O 、 A 、 B 是平面上不共線三點，
且 P 為 $\overline{AB}$ 的垂直平分線上任意一點，
若 $|\overrightarrow{OA}|=8$ ，$|\overrightarrow{OB}|=4$ ，則 $\overrightarrow{OP}\cdot\left(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}\right)$
之值為下列哪一個選項？
(1) 12　(2) 24　(3) 32　(4) 48　(5) 64 。



3. 設 a 、 b 為實數，若直線 L ： $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1$ 通過一點 $P(\cos\alpha,\sin\alpha)$ ， $0\le\alpha<2\pi$ ，
則下列選項何者正確？
(1) $a+b\ge1$　(2) $a^2+b^2\le1$　(3) $a^2+b^2\ge1$　(4) $\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}\le1$　(5) $\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}\ge1$ 。

4. 利用定積分的幾何意義計算 $\displaystyle\int_{-2}^{2}\left(x^2\sin x+\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}\right)dx$ 的值為下列哪一個選項？
(1) $\dfrac{1}{2}\pi$　(2) $\dfrac{2}{3}\pi$　(3) $\dfrac{5}{6}\pi$　(4) π　(5) 2π 。

二、多選題

5. 重複投擲一枚不均勻的硬幣 18 次，若以 P_k 表示其中恰好出現 k 次正面的機率，
且經計算得 $\log_2\left(\dfrac{P_0}{P_{18}}\right)=36$ ，請選出正確的選項：
(1)此硬幣出現正面的機率 $p=\dfrac{1}{5}$　　(2) P_0 、 P_1 、 P_2 、……、 P_{18} 的平均值是 $\dfrac{1}{5}$
(3)投擲此硬幣 18 次，出現正面次數的期望值為 $\dfrac{18}{5}$ 次
(4) P_0 、 P_1 、 P_2 、……、 P_{18} 中的最大值是 P_4
(5)在連續擲出 17 次反面後，此硬幣於第 18 次投擲出現正面的機率為 P_1 。

6. 若 $f(x)=12x^3+(6a+1)x^2-\left(a^2+3a+3\right)x+6$ 為一個整係數多項式，
且方程式 $f\left(x^2\right)=0$ 有二個絕對值小於 1 的有理根，請選出正確的選項：
(1)若 k 為方程式 $f\left(x^2\right)=0$ 的根，則 k^2 為方程式 $f(x)=0$ 的根

(2)方程式 $f\left(x^{2}\right)=0$ 恰有4個實根

(3)若 $x=\dfrac{q}{p}$ 為方程式 $f(x)=0$ 的有理根，其中 p 、 q 皆為整數，則 $p\,|\,12$ 且 $q\,|\,6$

(4) a 為完全平方數　　　　(5)方程式 $f(x)=0$ 恰有1個有理根。

7. 已知二階方陣 $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ ，其中 a 、 b 、 c 、 d 均為實數，

$X_0=\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}$ 、 $X_1=\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}$ 、 $X_2=\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}$ 、 $X_3=\begin{bmatrix} x_3 \\ y_3 \end{bmatrix}$ ，請選出正確的選項：

(1)若 $ad-bc=0$ ，且 $abcd\neq 0$ ， X_0 為坐標平面上之一點，

則 AX_0 必落在斜率為 $\dfrac{c}{a}$ 且通過原點的直線上

(2)若 $ad-bc=0$ ，且 $abcd\neq 0$ ，

則滿足方程式 $A\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ 的所有 $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ 必落在斜率為 $-\dfrac{a}{c}$ 且通過原點的直線上

(3)若 $A=\begin{bmatrix} \frac{1}{5} & \frac{3}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{6}{5} \end{bmatrix}$ ， X_0 為坐標平面上之一點，則 AX_0 為 X_0 在直線 $y=2x$ 上之投影

(4)若 $ad-bc\neq 0$ ，且 X_1 、 X_2 、 X_3 為坐標平面上不共線之相異三點，

則 AX_1 、 AX_2 、 AX_3 三點亦不共線

(5)若坐標平面上任一點 $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ 皆可依序先由二階方陣 A 變換、再經方陣 $\begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ 變換至

$\begin{bmatrix} -y \\ -x \end{bmatrix}$ ，則矩陣 A 為鏡射矩陣。

8. 已知複數平面上 O 為原點，三相異點 A 、 B 、 C 所對應之複數分別為 z_1 、 z_2 、 z_3 ，

且 $|z_1|=|z_2|=|z_1-z_2|=\sqrt{3}$ ，請選出正確的選項：

(1)若 $|z_1+z_2-z_3|=1$ ，則 $2\leq|z_3|\leq 4$　　　(2) $z_1^6-z_2^6=0$

(3) $z_1^2+z_1z_2+z_2^2=0$　　　　(4) $|1-z_1|^2+|1-z_2|^2$ 的最小值為2

(5)若 D 點所對應之複數為 $2z_2-z_1$ ，則 $\overline{OA}\perp\overline{OD}$ 。

三、選填題

A. 投擲一顆公正的骰子（六個面的點數分別為1、2、3、4、5、6且每面出現的機會均等）兩次，設第一次與第二次所得到的點數分別為 p 、 q 。請問：在 p 、 q 中至少有一數為5的條件下，方程式 $x^2+px+q=0$ 有實根的機率為________。（化為最簡分數）

B. 坐標平面上，直線 $y=\frac{1}{2}x$ 與函數 $y=\csc\left(\frac{2}{3}x+\pi\right)+1$ 的圖形在 y 軸右側的交點由左而右依序為 A_1、A_2、A_3、……。若以 x_k 表示點 A_k 的 x 坐標，並定義數列〈c_n〉=〈$x_{n+1}-x_n$〉，則 $\lim\limits_{n\to\infty} c_n=$________。（化為最簡分數）

C. 設 $f(x)$ 為可微分函數，若 $f(1)=2$ 且 $f'(1)=1$，則 $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2 f(1)-f\left(x^3\right)}{x-1}=$_______。

第貳部分：非選擇題

1. 若實係數多項式 $f(x)$ 滿足 $f(x)=x^4-4x^3-x^2+x+\int_k^x f(t)\,dt$：

(1)試求 $\deg f(x)$。

(2)試求 $f(x)$。

(3)若 $k<0$，試求 k 之值。

(4)試計算 $\int_{-3}^{2} f(x)\,dx$ 之值。

2. 已知平面 E 為包含直線 L：$\frac{x}{1}=\frac{-y-1}{2}=\frac{z-1}{1}$ 的平面中與點 $P(3,-2,2)$ 距離最遠者，若 F 為包含直線 L 的平面，且 $d(P,F)=\frac{1}{\sqrt{7}}d(P,E)$，試計算下列各題：

(1)若 $\overrightarrow{n}=(a,1,b)$ 為平面 E 的法向量，試求數對 (a,b)。

(2)若平面 E 與平面 F 的銳夾角為 θ，試求 $\tan\theta$ 之值。

(3)試求平面 F 的方程式。

RA677 臺北區高中 **105** 學年度第二學期指定科目第二次
聯合模擬考數學甲　參考答案

第壹部分：選擇題

1. (3)　**2.** (2)　**3.** (5)　**4.** (4)　**5.** (1)(3)　**6.** (1)(2)(4)　**7.** (1)(4)　**8.** (1)(2)(4)(5)

選填題

A. $\frac{7}{11}$　**B.** $\frac{3}{2}\pi$　**C.** 1

第貳部分：非選擇題

一、(1) 3　(2) $f(x)=-4x^3+2x+1$　(3) -1　(4) 65

二、(1) $(2,0)$　(2) $\sqrt{6}$　(3) $3x-y-5z+4=0$ 或 $x+3y+5z-2=0$