台北區高中 106 年(105 學年度)高三下
第二次指考模擬考數學(自然組)試題

俞克斌老師編寫

俞克斌數學

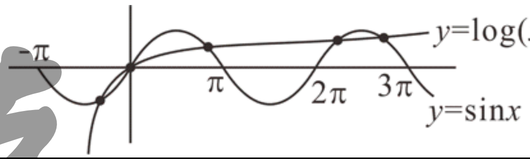
第壹部分：選擇題

一、單選題

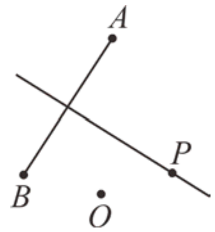
1. 方程式$\log(x+1)-\sin x=0$有多少個相異的實根？
(1)3個 (2)4個 (3)5個 (4)6個 (5)7個。【106北區模(2)】

答：(3)

解：$y=\log(x+1)$與$y=\sin x$有5個交點



2. 如右圖，設O、A、B是平面上不共線三點，
且P為$\overline{AB}$的垂直平分線上任意一點，
若$\left|\overrightarrow{OA}\right|=8$，$\left|\overrightarrow{OB}\right|=4$，則$\overrightarrow{OP}\cdot\left(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}\right)$
之值為下列哪一個選項？
(1)12 (2)24 (3)32 (4)48 (5)64。【106北區模(2)】



答：(2)

解：所求$=\dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}\right)\cdot\left(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}\right)=\dfrac{1}{2}\left(\left|\overrightarrow{OA}\right|^2-\left|\overrightarrow{OB}\right|^2\right)=24$

3. 設a、b為實數，若直線L：$\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1$通過一點$P(\cos\alpha,\sin\alpha)$，$0\le\alpha<2\pi$，
則下列選項何者正確？
(1)$a+b\ge1$ (2)$a^2+b^2\le1$ (3)$a^2+b^2\ge1$ (4)$\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}\le1$ (5)$\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}\ge1$。
【106北區模(2)】

答：(5)

解：$P\in x^2+y^2=1$與L：$bx+ay=ab$有相交

故$\dfrac{|0+0-ab|}{\sqrt{b^2+a^2}}\le1\Rightarrow a^2+b^2\ge a^2b^2\Rightarrow\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}\ge1$

4. 利用定積分的幾何意義計算$\int_{-2}^{2}\left(x^2\sin x+\sqrt{1-\dfrac{x^2}{4}}\right)dx$的值為下列哪一個選項？
(1)$\dfrac{1}{2}\pi$ (2)$\dfrac{2}{3}\pi$ (3)$\dfrac{5}{6}\pi$ (4)π (5)2π。【106北區模(2)】

答：(4)

解：所求$=\int_{-2}^{2}\left(\sqrt{1-\dfrac{x^2}{4}}\right)dx$ $\because x^2\sin x$為奇函數

$\because y=\sqrt{1-\dfrac{x^2}{4}}\geq 0$，恰表$\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{1}=1$的上半部　　故所求$=\pi\times 2\times 1\times\dfrac{1}{2}=\pi$

二、多選題

5. 重複投擲一枚不均勻的硬幣18次，若以P_k表示其中恰好出現k次正面的機率，

且經計算得$\log_2\left(\dfrac{P_0}{P_{18}}\right)=36$，請選出正確的選項：

(1)此硬幣出現正面的機率$p=\dfrac{1}{5}$

(2)P_0、P_1、P_2、……、P_{18}的平均值是$\dfrac{1}{5}$

(3)投擲此硬幣18次，出現正面次數的期望值爲$\dfrac{18}{5}$次

(4)P_0、P_1、P_2、……、P_{18}中的最大值是P_4

(5)在連續擲出17次反面後，此硬幣於第18次投擲出現正面的機率爲P_1。【106北區模(2)】

答：(1)(3)

解：(1)$\dfrac{P_0}{P_{18}}=\dfrac{C_0^{18}P^0(1-P)^{18}}{C_{18}^{18}P^{18}(1-P)^0}=2^{36}\Rightarrow\left(\dfrac{1-P}{P}\right)=4\Rightarrow P=\dfrac{1}{5}$

(2)$\dfrac{P_0+P_1+\cdots\cdots+P_{18}}{19}=\dfrac{1}{19}$　　(3)$E(X)=18\times\dfrac{1}{5}=\dfrac{18}{5}$

(4)$18\times\dfrac{1}{5}-1\leq r\leq 18\times\dfrac{1}{5}\xrightarrow{r\in Z}r=3$　　(5)應爲$P=\dfrac{1}{5}\neq P_1=C_1^{18}\left(\dfrac{1}{5}\right)^1\left(\dfrac{4}{5}\right)^{17}$

6. 若$f(x)=12x^3+(6a+1)x^2-\left(a^2+3a+3\right)x+6$爲一個整係數多項式，

且方程式$f\left(x^2\right)=0$有二個絕對值小於1的有理根，請選出正確的選項：

(1)若k爲方程式$f\left(x^2\right)=0$的根，則k^2爲方程式$f(x)=0$的根

(2)方程式$f\left(x^2\right)=0$恰有4個實根

(3)若$x=\dfrac{q}{p}$爲方程式$f(x)=0$的有理根，其中p、q皆爲整數，則$p\mid 12$且$q\mid 6$

(4)a爲完全平方數

(5)方程式$f(x)=0$恰有1個有理根。【106北區模(2)】

答：(1)(2)(4)

解：(1)均爲$f\left(k^2\right)=0$

(2)若$f(x)=0$的解爲$t>0$，則$f\left(x^2\right)=0$的解爲$\pm\sqrt{t}$

俞克斌數學

若 $f(x)=0$ 的解爲 $s<0$，則 $f\left(x^2\right)=0$ 的解爲 $\pm\sqrt{-s}\,i$

故 $f\left(x^2\right)=0$ 有二個絕對值小於1的有理根，亦即 $\pm\sqrt{t}=\pm\sqrt{\dfrac{n^2}{m^2}}=\pm\dfrac{n}{m}$，$n<m$

則 $f(x)=0$ 有一個絕對值小於1的正有理根，亦即 $t=\dfrac{n^2}{m^2}>0$

由韋達定理得知，$f(x)=0$ 的三根之積 $-\dfrac{1}{2}$，故另兩根之積 <0

則另兩根爲共軛虛根（乘積爲正，不合）或一正一負根（合）

故 $f(x)=0$ 恰有 2 正根 1 負根，故 $f\left(x^2\right)=0$ 恰有 4 實根 2 虛根

(3)必須 $(p,q)=1$ 才成立

(4)由牛頓定理得知 $m^2\,|\,12$ 且 $n^2\,|\,6$，故 $n^2=1$、$m^2=4$，故 $t=\dfrac{1}{4}$

則 $f\left(\dfrac{1}{4}\right)=\dfrac{3}{16}+\dfrac{6a+1}{16}-\dfrac{a^2+3a+3}{4}+6=0\Rightarrow a=4,-\dfrac{11}{2}$（不合），$a$ 爲完全平方

(5) $f(x)=12x^3+25x^2-31x+6=(4x-1)(3x-2)(x+3)=0\Rightarrow x=\dfrac{1}{4},\dfrac{2}{3},-3$ 三有理根

7. 已知二階方陣 $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$，其中 a、b、c、d 均爲實數，

$X_0=\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}$、$X_1=\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}$、$X_2=\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}$、$X_3=\begin{bmatrix} x_3 \\ y_3 \end{bmatrix}$，請選出正確的選項：

(1)若 $ad-bc=0$，且 $abcd\neq 0$，X_0 爲坐標平面上之一點，

則 AX_0 必落在斜率爲 $\dfrac{c}{a}$ 且通過原點的直線上

(2)若 $ad-bc=0$，且 $abcd\neq 0$，

則滿足方程式 $A\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ 的所有 $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ 必落在斜率爲 $-\dfrac{a}{c}$ 且通過原點的直線上

(3)若 $A=\begin{bmatrix} \frac{1}{5} & \frac{3}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{6}{5} \end{bmatrix}$，$X_0$ 爲坐標平面上之一點，則 AX_0 爲 X_0 在直線 $y=2x$ 上之投影

(4)若 $ad-bc\neq 0$，且 X_1、X_2、X_3 爲坐標平面上不共線之相異三點，

則 AX_1、AX_2、AX_3 三點亦不共線

(5)若坐標平面上任一點 $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ 皆可依序先由二階方陣 A 變換、再經方陣 $\begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ 變換至

$\begin{bmatrix} -y \\ -x \end{bmatrix}$，則矩陣 A 爲鏡射矩陣。 【106 北區模(2)】

答：(1)(4)

俞克斌數學

解：(1) $ad-bc=0\Rightarrow \frac{b}{a}=\frac{d}{c}=t\Rightarrow AX_0=\begin{bmatrix}a & at\\ c & ct\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_0\\ y_0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}ax_0+aty_0\\ cx_0+cty_0\end{bmatrix}\in cx-ay=0$

(2) $\begin{bmatrix}ax_0+aty_0\\ cx_0+cty_0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}\Rightarrow x_0+ty_0=0$，斜率爲 $-\frac{1}{t}=-\frac{a}{b}=-\frac{c}{d}$

(3) $AX_0=\begin{bmatrix}\frac{1}{5} & \frac{3}{5}\\ \frac{2}{5} & \frac{6}{5}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_0\\ y_0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{5}\left(x_0+3y_0\right)\\ \frac{2}{5}\left(x_0+3y_0\right)\end{bmatrix}\in 2x-y=0$

但 X_0、X_0'的斜率 $\frac{2x_0-4y_0}{-4x_0+3y_0}$ 不恆爲 $-\frac{1}{2}$

(4) X_1、X_2、X_3不共線，所圍面積 $\frac{1}{2}\left\|\begin{matrix}\overrightarrow{X_1X_2}\\ \overrightarrow{X_1X_3}\end{matrix}\right\|\neq 0$，又 $ad-bc\neq 0$，

則面積 $\frac{1}{2}\left\|\begin{matrix}\overrightarrow{AX_1AX_2}\\ \overrightarrow{AX_1AX_3}\end{matrix}\right\|=\frac{1}{2}\left|A\right|\left\|\begin{matrix}\overrightarrow{X_1X_2}\\ \overrightarrow{X_1X_3}\end{matrix}\right\|\neq 0$，故 AX_1、AX_2、AX_3亦不共線

(5) $\begin{bmatrix}4 & -3\\ 3 & 4\end{bmatrix}A\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-y\\ -x\end{bmatrix}\Rightarrow A\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\frac{1}{25}\begin{bmatrix}4 & 3\\ -3 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-y\\ -x\end{bmatrix}=\frac{1}{25}\begin{bmatrix}-3 & -4\\ -4 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}$

8. 已知複數平面上O爲原點，三相異點A、B、C所對應之複數分別爲z_1、z_2、z_3，且$\left|z_1\right|=\left|z_2\right|=\left|z_1-z_2\right|=\sqrt{3}$，請選出正確的選項：

(1)若$\left|z_1+z_2-z_3\right|=1$，則$2\le\left|z_3\right|\le 4$　(2) $z_1^6-z_2^6=0$　(3) $z_1^2+z_1z_2+z_2^2=0$

(4) $\left|1-z_1\right|^2+\left|1-z_2\right|^2$的最小值爲2

(5)若D點所對應之複數爲$2z_2-z_1$，則$\overline{OA}\perp\overline{OD}$。　【106 北區模(2)】

答：(1)(2)(4)(5)

解：$\left|z_1\right|=\left|z_2\right|=\left|z_1-z_2\right|=\sqrt{3}$，表$z_1$、$z_2$、$O$位於高斯平面，構成正$\Delta$

(2)(3)(5) $z_1=\sqrt{3}$，$z_2=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{3}{2}i=\sqrt{3}\left(\cos 60^\circ+i\sin 60^\circ\right)$

$z_1^6=3^3=z_2^6$，$z_1^2+z_1z_2+z_2^2\neq 0$

$2z_2-z_1=3i$，與$z_1=\sqrt{3}$互相垂直

(1) $\left|z_3-\left(z_1+z_2\right)\right|=1\Rightarrow z_3\in\left(x-\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(y-\frac{3}{2}\right)^2=1$

$\Rightarrow 3-1\le\left|z_3\right|\le 3+1\Rightarrow 2\le\left|z_3\right|\le 4$

(4) $\left(\left|1-z_1\right|^2+\left|1-z_2\right|^2\right)\left(1^2+1^2\right)\ge\left(\left|1-z_1\right|+\left|1-z_2\right|\right)^2\ge 2^2$

所求$Min=2$

解：$\left|z_1\right|=\left|z_2\right|=\left|z_1-z_2\right|=\sqrt{3}$，表$z_1$、$z_2$、$O$位於高斯平面，構成正$\Delta$

俞克斌數學

(1) $\left|z_3-\left(z_1+z_2\right)\right|=1 \Rightarrow z_3$ 位於以 $P\left(z_1+z_2\right)$ 爲圓心，1 爲半徑的圓上

$\Rightarrow 3-1\le\left|z_3\right|\le 3+1 \Rightarrow 2\le\left|z_3\right|\le 4$

(2) $z_1=\sqrt{3}\left(\cos\theta+i\sin\theta\right)$，$z_2=\sqrt{3}\left(\cos\left(\theta\pm60^\circ\right)+i\sin\left(\theta\pm60^\circ\right)\right)$，則 $z_1^6=z_2^6$

(3)則 $z_1^2+z_1z_2+z_2^2=3\left(\cos2\theta+i\sin2\theta\right)+3\left(\cos\left(2\theta\pm60^\circ\right)+i\sin\left(2\theta\pm60^\circ\right)\right)$
$+3\left(\cos\left(2\theta\pm120^\circ\right)+i\sin\left(2\theta\pm120^\circ\right)\right)\ne0$

應 $z_1^2-z_1z_2+z_2^2=3\left(\cos2\theta+i\sin2\theta\right)-3\left(\cos\left(2\theta\pm60^\circ\right)+i\sin\left(2\theta\pm60^\circ\right)\right)$
$+3\left(\cos\left(2\theta\pm120^\circ\right)+i\sin\left(2\theta\pm120^\circ\right)\right)\ne0$

(4)由中線定理得知 $\left|1-z_1\right|^2+\left|1-z_2\right|^2=2\left(\left|1-\dfrac{z_1+z_2}{2}\right|^2+\left(\dfrac{\left|z_1-z_2\right|}{2}\right)^2\right)$

$=2\left(\left|1-\dfrac{z_1+z_2}{2}\right|^2+\dfrac{3}{4}\right)\xrightarrow{\frac{z_1+z_2}{2}\in x^2+y^2=\frac{9}{4}}$ 當 $\dfrac{z_1+z_2}{2}=\dfrac{3}{2}$，有最小值 2

(5) $2z_2-z_1$ 與 z_2 夾 30°（畫圖即知），故 $2z_2-z_1$ 與 z_1 互相垂直

三、選填題

A. 投擲一顆公正的骰子（六個面的點數分別爲1、2、3、4、5、6且每面出現的機會均等）兩次，設第一次與第二次所得到的點數分別爲 p、q。請問：在 p、q 中至少有一數爲5的條件下，方程式 $x^2+px+q=0$ 有實根的機率爲________。（化爲最簡分數）

【106 北區模(2)】

答：$\dfrac{7}{11}$

解：

p	5	5	5	5	5	1	2	3	4	6	5
q	1	2	3	4	6	5	5	5	5	5	5
p^2-4q	21	17	13	9	1	-19	-16	-11	-4	16	5

條件機率 $=\dfrac{7}{11}$

B. 坐標平面上，直線 $y=\dfrac{1}{2}x$ 與函數 $y=\csc\left(\dfrac{2}{3}x+\pi\right)+1$ 的圖形在 y 軸右側的交點由左而右依序爲 A_1、A_2、A_3、……。若以 x_k 表示點 A_k 的 x 坐標，並定義數列 $\langle c_n\rangle=\langle x_{n+1}-x_n\rangle$，則 $\lim\limits_{n\to\infty}c_n=$________。（化爲最簡分數）

【106 北區模(2)】

答：$\dfrac{3}{2}\pi$

解：$y=\csc\left(\dfrac{2}{3}x+\pi\right)+1$ 週期爲 $2\pi\times\dfrac{3}{2}=3\pi$，$\lim\limits_{n\to\infty}c_n=$ 兩漸近線間隔 $=$ 半週期 $=\dfrac{3\pi}{2}$

C. 設 $f(x)$ 爲可微分函數，若 $f(1)=2$ 且 $f'(1)=1$，則 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2f(1)-f\left(x^3\right)}{x-1}=$________。

【106 北區模(2)】

俞克斌數學

$\boxed{答}$：1

$\boxed{解}$：$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{-\left[f\left(x^3\right)-f(1)\right]+\left[x^2f(1)-f(1)\right]}{x-1}$

$$=\lim_{\substack{x\to1\\x^3\to1}}\left(\frac{-\left[f\left(x^3\right)-f(1)\right]}{x^3-1}\times\left(x^2+x+1\right)+f(1)(x+1)\right)=-f'(1)\times3+2\times2=1$$

第貳部分：非選擇題

1. 若實係數多項式 $f(x)$ 滿足 $f(x)=x^4-4x^3-x^2+x+\int_k^x f(t)\,dt$：
   (1)試求 $\deg f(x)$。
   (2)試求 $f(x)$。
   (3)若 $k<0$，試求 k 之值。
   (4)試計算 $\int_{-3}^{2}f(x)\,dx$ 之值。【106 北區模(2)】

$\boxed{答}$：(1) 3　(2) $f(x)=-4x^3+2x+1$　(3) -1　(4) 65

$\boxed{解}$：$f'(x)=4x^3-12x^2-2x+1+f(x)\Rightarrow f(x)=-4x^3+12x^2+2x-1+f'(x)$

故 $\deg f(x)=3$，而 $f(x)=-4x^3+ax^2+bx+c\Rightarrow f'(x)=-12x^2+2ax+b$

故 $-4x^3+ax^2+bx+c=-4x^3+(2a+2)x+(b-1)$

則 $a=0$，$b=2$，$c=1$，$f(x)=-4x^3+2x+1$

故 $f(k)=k^4-4k^3-k^2+k+0=-4k^3+2k+1\Rightarrow k^4-k^2-k-1=0$

$\Rightarrow(k+1)\left[k^3-k^2+6k-1\right]=0\xrightarrow{k<0}k^3-k^2-1=0$ 無負根 $\Rightarrow k=-1$

故 $\int_{-3}^{2}f(x)\,dx=\left[-x^4+x^2+x+c\right]_{-3}^{2}=65$

2. 已知平面 E 為包含直線 L：$\dfrac{x}{1}=\dfrac{-y-1}{2}=\dfrac{z-1}{1}$ 的平面中與點 $P(3,-2,2)$ 距離最遠者，若 F 為包含直線 L 的平面，且 $d(P,F)=\dfrac{1}{\sqrt7}d(P,E)$，試計算下列各題：
   (1)若 $\overrightarrow{n}=(a,1,b)$ 為平面 E 的法向量，試求數對 (a,b)。
   (2)若平面 E 與平面 F 的銳夾角為 θ，試求 $\tan\theta$ 之值。
   (3)試求平面 F 的方程式。【106 北區模(2)】

$\boxed{答}$：(1) $(2,0)$　(2) $\sqrt6$　(3) $3x-y-5z+4=0$ 或 $x+3y+5z-2=0$

$\boxed{解}$：L 上動點 $M(t,-1-2t,1+t)$，$\overrightarrow{L}=(1,-2,1)$

$\overrightarrow{PM}=(t-3,1-2t,t-1)$，$\overrightarrow{PM}\cdot\overrightarrow{L}=6t-6=0\Rightarrow t=1$

故 P 在 L 上投影點 $M(1,-3,2)\Rightarrow\overrightarrow{MP}=(2,1,0)=\overrightarrow{n}$

故平面 E（過 $(0,-1,1)$）為 $2x+y+1=0$

俞克試數學

L：$\begin{cases} 2x+y+1=0 \\ y+2z-1=0 \end{cases}$，包含$L$之平面族$(2x+y+1)+k(y+2z-1)=0$

即F：$2x+(1+k)y+2kz+(1-k)=0$，而$d(P,F)=\dfrac{1}{\sqrt{7}}d(P,E)$

$$\Rightarrow \sqrt{7}\times\frac{|k+5|}{\sqrt{4+(1+k)^2+4k^2}}=\frac{5}{\sqrt{5}}\Rightarrow k=5\text{或}-\frac{5}{3}$$

則F：$2x+6y+10z-4=0$或$6x-2y-10z+8=0$

即$x+3y+5z-2=0$或$3x-y-5z+4=0$

$$\cos\theta=\left|\frac{5}{\sqrt{35}\cdot\sqrt{5}}\right|=\frac{1}{\sqrt{7}}\Rightarrow\tan\theta=\sqrt{6}$$

俞克斌數學