

南區高中 105 學年度第二學期指定科目

模擬考 數學甲



RA678

第壹部分：選擇題(共占 76 分)

一、單選題(占 24 分)

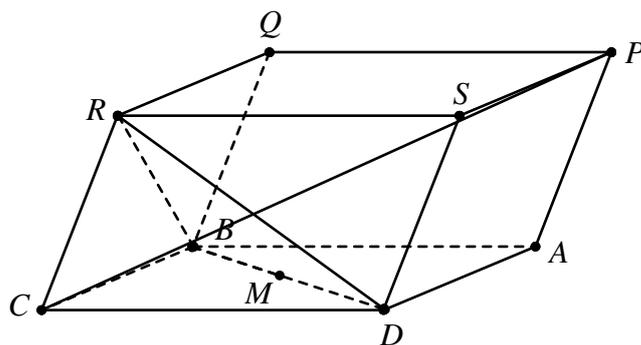
- 請問面積為 5，且三頂點為 $A(5,0)$ ， $B(-5,0)$ ， $C(2\cos\theta, 2\sin\theta)$ 的三角形有幾個？
(1) 0 (2) 1 (3) 2 (4) 4 (5) 無限多
- 已知圓 Γ 之方程式為 $x^2 + y^2 = 20$ ，原點 $O(0,0)$ ， $A(6,0)$ ，且 $B(a,b)$ 為 Γ 上之動點，其中 a, b 皆大於 0。則當 $\cos\angle OAB$ 為最小值時，直線 AB 的斜率為下列何者？
(1) $-\frac{2}{3}$ (2) $-\frac{4}{9}$ (3) $-\frac{5}{9}$ (4) $-\frac{\sqrt{5}}{2}$ (5) $-\frac{\sqrt{5}}{3}$
- 設 $i = \sqrt{-1}$ ，已知多項式函數 $f(x) = x^5 + 2x^4 - 4x^3 - 8x^2 + Kx + 32$ ， K 為實數。若 $\sqrt{3} - i$ 為方程式 $f(x) = 0$ 的根，則下列選項何者正確？
(1) $-\sqrt{3} - i$ 為 $f(x) = 0$ 的根 (2) $K = -16$ (3) 方程式 $f(x) = 0$ 只有虛根
(4) $x - 4$ 可能是 $f(x)$ 的因式 (5) $f(x)$ 有二次的整係數因式
- 已知 $-\frac{1}{3} \leq \cos(\frac{\pi}{4} - \alpha) \leq \frac{2}{3}$ ，則 $\sin 2\alpha$ 最大值與最小值的和為下列何者？
(1) $\frac{1}{3}$ (2) 0 (3) $-\frac{10}{9}$ (4) $-\frac{8}{9}$ (5) $\frac{5}{9}$

二、多選題(占 24 分)

- 令 $A(-2,0)$ 、 $B(0,1)$ 、 $C(2,1)$ 、 $D(4,3)$ 為坐標平面上四點，請選出正確的選項。
(1) 恰有一直線通過 A 、 B 、 D 三點 (2) 恰有一圓通過 A 、 B 、 D 三點
(3) A 、 B 、 C 、 D 四點中任取兩點所決定的直線，其斜率皆為正數，且最大值為 1
(4) 恰有一個二元多項式函數 $f(x)$ 的圖形通過 B 、 C 、 D 三點，且 $f(x)$ 的最小值為 $\frac{3}{4}$
(5) 可找到兩平行線，其聯集包含 A 、 B 、 C 、 D 四點

- 如圖(1)所示，已知平行六面體 $ABCD-PQRS$ 的底面 $ABCD$ 為菱形，且 M 為 \overline{BD} 中點。若 $\angle RCB = \angle RCD = \angle BCD = 60^\circ$ ， $\overline{CD} = 2$ ， $\overline{CR} = \frac{3}{2}$ ，則下列哪些選項正確？

- $\overline{MC} = \sqrt{3}$ (2) $\overline{MR} = \frac{\sqrt{3}}{2}$
- 平面 BDR 與平面 BDC 的夾角為 60°
- $\overline{RC} \perp \overline{BD}$
- 若 $\frac{\overline{CR}}{\overline{CD}} = \frac{1}{2}$ (其餘條件不變)，則 \overline{CP} 垂直平面 BDR



圖(1)

- 因應節能減碳及環境保護等綠色政策與思維，各級地方政府積極推動腳踏車的租賃。以某市為例，持一卡通、悠遊卡及信用卡民眾可 1 次租借自行車。費率計算方式為每車每次租車時間不超過 30 分鐘免費，超過 30 分鐘的部分每 30 分鐘 10 元(不足 30 分鐘，以 30 分鐘計)。志明、春嬌兩人相互獨立來租車(各租一車一次)。設志明、春嬌不超過 30 分鐘還車的機率為 $\frac{1}{3}$ 、 $\frac{1}{2}$ ；30 分鐘以上且不超過 1 小時還車的機率分別為 $\frac{1}{2}$ 、 $\frac{1}{3}$ ，兩人租車時間都不會超過 1.5 小時，則下列哪些選項正確？

- (1) 志明所付租車費用高於春嬌所付租車費用的機率為 $\frac{7}{18}$
- (2) 志明所付租車費用的變異數為 $\frac{325}{9}$ (3) 兩人同時超過 1 小時還車的機率為 $\frac{1}{36}$
- (4) 兩人所付租車費用相同的機率為 $\frac{13}{36}$
- (5) 兩人所付租車費用之和為隨機變數 X ，則數學期望值 $E(X)$ 為 18 元

三、選填題(占 28 分)

- A. 網球比賽的一局中，每一球皆由同一人發球。若比數沒有出現 3:3，則先贏 4 球者獲得此局的勝利；若比數出現 3:3，則稱為 *Deuce*，兩方分數就要歸零成 0:0，重新計算，直到有一方贏另一方兩球為止。經統計發現，實力相當的兩方對決時，發球者贏得此球的機率較大，其機率為 $\frac{2}{3}$ 。假設每一球的輸贏互相獨立，則發球者不經過 *Deuce* 而贏得此局的機率為_____。
(化為最簡分數)
- B. 已知實係數方程式 $ax^3 - 3x^2 + 1 = 0$ 恰有一實根，且此實根為正數，則實數 a 的範圍為_____。
- C. 已知 $f(x) = x^2 - x + k$ ，且 $\log_2 f(a) = 2$ ， $f(\log_2 a) = k$ ， $a > 0$ 且 $a \neq 1$ 。若 $f(\log_2 x)$ 的最小值為 m ，則 $a+k+m =$ _____。(化為最簡分數)
- D. 設函數 $f(x) = \begin{cases} x^3 - 6x + 1, & x \leq a \\ -2x + 1, & x > a \end{cases}$ ，其中 a 為實數，試問：若 $f(x)$ 沒有最大值，則實數 a 的範圍為_____。

第貳部分：非選擇題(占 24 分)

一、設四邊形 $ABCD$ 中， $\overline{BC} = 6$ ， $\overline{CD} = 3$ ， $\angle DAB = 90^\circ$ ， $\angle BCD = 60^\circ$ ，則：

- (1) $\overline{BC} \cdot \overline{CD} = ?$ (4 分)
- (2) $\overline{BD} = ?$ (4 分)
- (3) 四邊形 $ABCD$ 周長的最大值為何？(4 分)

二、設拋物線 $\Gamma: y = -x^2 + 4x - 3$ ，試問：

- (1) 以 $(0, -3)$ 、 $(3, 0)$ 兩點為切點的兩切線 L_1 、 L_2 相交於 P 點，求 P 點坐標？(6 分)
- (2) 兩直線 L_1 、 L_2 與拋物線 Γ 圍成的區域面積為何？(6 分)

第壹部分：選擇題

1. (4) 2. (4) 3. (1) 4. (3) 5. (1)(4)(5) 6. (1)(4) 7. (1)(3)(4)

選填題

- A. $\frac{496}{729}$ B. $a < -2$ C. $\frac{23}{4}$ D. $a < -2$

第貳部分：非選擇題

一、(1) -9 (2) $3\sqrt{3}$ (3) $9+3\sqrt{6}$

二、(1) $P(\frac{3}{2}, 3)$ (2) $\frac{9}{4}$