

全國公立高級中學 105 學年度指定科目
第七次聯合模擬考(數學甲)



RA679

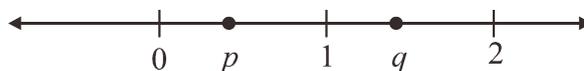
第壹部分：選擇題

一、單選題

1. 設 p 、 q 為實數，其在數線上的位置如圖所示。若已知 $0.1 < p < 0.5$ 且 $q = p + 1$ ，

則下列哪一個選項的數 x ，滿足 $|x-1| > 1$ ？

- (1) $x = 1.1p - 0.1q$ (2) $x = -0.1p + 1.1q$
 (3) $x = (1 - \sqrt{2})p + \sqrt{2}q$ (4) $x = 0.1p + 0.9q$
 (5) $x = -0.9p + 1.9q$ 。



2. 平面上兩點 $A(-1, 4)$ 、 $B(3, 2)$ 以及一直線 $L: y = mx$ ， m 為某實數。

如果想要在直線 L 上找一點 P ，使得 $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{BP} = 0$ ，那麼下列哪一個選項中的 m 值，無法使直線 $y = mx$ 上能找到這樣的 P 點？

- (1) -3 (2) -2 (3) -1 (4) 1 (5) 2。

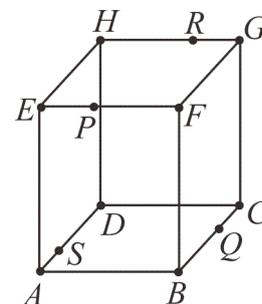
3. 設有一數列 $\langle a_n \rangle$ 的前 n 項和 $S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n = \frac{1}{4} \left(-\frac{1}{3} \right)^{n-1}$ ，

則 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 \cdot a_n}{S_n} = ?$ (1) 0 (2) $\frac{1}{4}$ (3) 4 (4) 1 (5) 不存在。

二、多選題

4. 如圖所示，正立方體 $ABCD-EFGH$ ，點 P 、 Q 、 R 、 S 分別在 \overline{EF} 、 \overline{BC} 、 \overline{GH} 、 \overline{DA} 上，且 $\overline{EF} = 3\overline{EP}$ 、 $\overline{BC} = 3\overline{QC}$ 、 $\overline{GH} = 3\overline{GR}$ 、 $\overline{DA} = 3\overline{SA}$ ，請選出正確的選項：

- (1) 四面體 $ACHF$ 的體積 $>$ 四面體 $GDAB$ 的體積
 (註：四面體的體積 $= \frac{1}{3} \times \text{底面積} \times \text{高}$)
 (2) 平面 $HEBC$ 截四面體 $GDAB$ 所成截面的面積 $>$ 平面 $EFCD$ 截四面體 $GDAB$ 所成截面的面積
 (3) 平面 $ACGE$ 與平面 $BDHF$ 的夾角 = 直線 AG 與直線 CE 的夾角
 (4) 直線 PR 到直線 QS 的距離 $>$ \overline{AB} (5) $\cos \angle ERA > \frac{\sqrt{2}}{2}$ 。



5. 設平面上直線 $L: x + y = 2$ 經過某二階矩陣變換後，所得圖形為直線 $L': y = \sqrt{2}$ 。請選出符合條件的矩陣：

- (1) $\begin{bmatrix} \cos 405^\circ & -\sin 405^\circ \\ \sin 405^\circ & \cos 405^\circ \end{bmatrix}$ (2) $\begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}^3$ (3) $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & \sqrt{2} \end{bmatrix}$
 (4) $\frac{\sqrt{2}}{2} \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ (5) $\frac{1}{2} \begin{bmatrix} -\sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} \end{bmatrix}$ 。

6. 設 θ 、 k 是實數，三元一次方程組
$$\begin{cases} \sqrt{3} \cos \theta x + y = 0 \\ \sin \theta x + y - z = 0 \\ (k+1)x + 2z = 0 \end{cases}$$
 解的個數會受到未知數 θ 與 k 的影響，請選出正確的選項：

響，請選出正確的選項：

(1) 存在 θ 與 k 使得方程組無解 (2) 若 $k < -6$ ，則方程組必有唯一解

(3) 若方程組有異於 $(0, 0, 0)$ 的解，則 $-300 \leq k \leq 300$

(4) 若 $k = 3$ ，且方程組有無限多解，則 $\theta = -\frac{\pi}{6}$

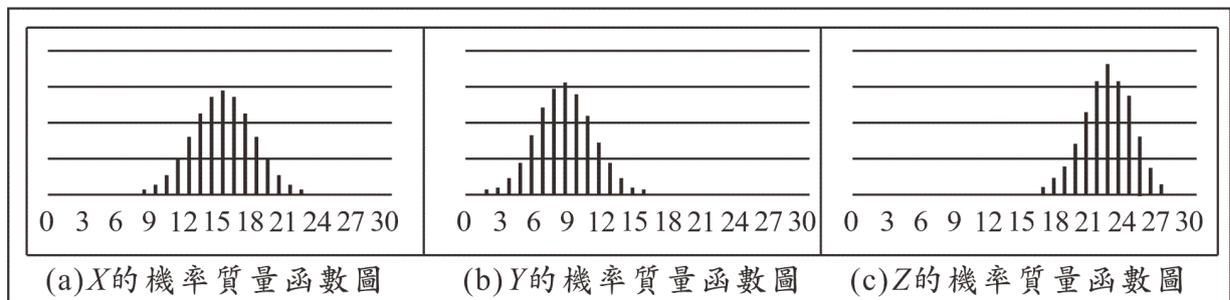
(5) 若 $\theta = \frac{\pi}{6}$ ，且方程組有無限多組解，則 $k = 1$ 。

7. 設實係數三次多項式函數 $f(x) = ax^3 - 3x^2 + cx + d$ ，在 $x = -2$ 以及 $x = 1$ 處有極值，請選出正確的選項：

(1) $a < 0$ (2) $c > 0$ (3) $f(1) > f(-2)$ (4) $\frac{f(1) + f(-2)}{2} > f\left(-\frac{1}{2}\right)$

(5) 若 $d < 0$ ，則 $\int_{-2}^1 f(x) dx < 0$ 。

8. 設有金、銀、銅硬幣各一枚，且擲出正面的機率分別為 p_x 、 p_y 、 p_z 。如圖，是以三個不同硬幣擲出正面的次數 X 、 Y 、 Z 為隨機變數，各擲 30 次所對應之機率質量函數圖。圖中的橫軸坐標表示擲出正面的次數，刻度 0, 1, 2, 3, …, 29, 30 (包括未顯示出者) 皆有向上的矩形長條，長度對應機率大小，每一橫線機率值間隔 0.05，從 0 到 0.2。



已知 X 、 Y 、 Z 的期望值與變異數分別為 $E(X)$ 、 $E(Y)$ 、 $E(Z)$ 與 $Var(X)$ 、 $Var(Y)$ 、 $Var(Z)$ ，請選出正確的選項：

(1) $p_x < p_y < p_z$ (2) $E(X) > E(Y) > E(Z)$ (3) $Var(X) > Var(Y) > Var(Z)$

(4) $Var(Z) = Var(30 - Z)$

(5) 圖中，各機率質量函數圖矩形長條之長度總和，以圖(c)為最大。

三、選填題

A. 已知指數函數 $f(x) = 1.3^x$ 與對數函數 $g(x) = \log_{1.3} x$ 兩者的圖形，相交於點 $A(x_1, y_1)$

以及點 $B(x_2, y_2)$ ，求 $\log_{x_1} 1.3^{3x_2} \cdot \log_{x_2} \frac{1}{1.3^{x_1}} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

- B. 某單位想要調查大眾對一新法規的瞭解比例，為了吸引民眾參與調查，設計了一無人的智慧機器裝置，其中設有模擬抽球遊戲，並在機器螢幕上廣告邀請民眾踴躍參加：「參加者模擬抽球如果抽到紅球，須回答對此法規的相關問題，回答正確，機器會送出一份禮券，若回答不正確，會送出一支棒棒糖；如果抽到白球，可直接得到禮券；如果抽到黑球，直接得到一支棒棒糖。」若一人限玩一次，機器模擬抽到紅球、白球、黑球的機率依序為 $\frac{1}{2}$ 、 $\frac{1}{10}$ 、 $\frac{2}{5}$ ，且最後主辦單位統計共發出 480 份禮券以及 620 支棒棒糖，則在參與的民眾回答了新法規相關問題的條件下，回答正確的機率為_____。
(化為最簡分數)

- C. 設空間中兩點 $A(a, 0, -1)$ 、 $B(4, b, 7)$ 分別在平面 $E: x - y + 2z = 3$ 上的投影點 P 、 Q 所成向量 $\overrightarrow{PQ} = (1, 1, c)$ ，則數組 $(a, b, c) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

第貳部分：非選擇題

- 一、直角坐標平面上，設正 $\triangle ABC$ 之重心為 $O(0, 0)$ ，頂點坐標為 $A(3, y)$ ，

且滿足 $(3 + yi)^3 = -117 - 44i$ ， $i = \sqrt{-1}$ ，試求：

(1) $y = ?$

(2) 若頂點 B 在第一象限，則頂點 C 的坐標為何？

(3) 若正 $\triangle ABC$ 的外接圓在 B 、 C 兩點處的切線之交點為 P ，則點 P 的坐標為何？

- 二、(1) 若不等式 $-t^2 + 3t - 2 \geq 0$ 的解之範圍為 $a \leq t \leq b$ ，則數對 $(a, b) = ?$

(2) 承(1)，設 $a \leq t \leq b$ ，若二次函數 $f(x) = x^2 + (t^2 - 3t + 2)x$ 與 x 軸所圍之封閉區域為 R ，則區域 R 的面積 $A(t)$ 為何？

(3) 承(2)，試求 $A(t)$ 的最大值，以及此時的 t 值為何？

RA679 全國公私立高級中學 105 學年度指定科目第七次聯合模擬考
(數學甲) 參考答案

第壹部分：選擇題

1. (5) 2. (3) 3. (4) 4. (1)(5) 5. (1)(2)(4) 6. (2)(3)(5) 7. (1)(2)(3)(5) 8. (3)(4)

選填題

- A. -3 B. $\frac{37}{55}$ C. (-1, -3, 0)

第貳部分：非選擇題

一、(1) -4 (2) $C\left(\frac{-3-4\sqrt{3}}{2}, \frac{4-3\sqrt{3}}{2}\right)$ (3) $P(-6, 8)$

二、(1) (1, 2) (2) $A(t) = -\frac{1}{6}(t-1)^3(t-2)^3$ (3) $t = \frac{3}{2}$ 時, $Max = \frac{1}{384}$