臺中區國立高級中學 106 學年度指定科目
第四次聯合模擬考數學甲

RA680

第壹部分：選擇題

一、單選題(占 18 分)

1. 設$f(x)$為一實係數多項式函數，滿足：

   I. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x^3+\sqrt{2}}=1$ 且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=-4$；

   II. $f(x)$在$x=\alpha$、$x=\beta$有極值，其中$\alpha<\beta$，且兩點$(\alpha,f(\alpha))$、$(\beta,f(\beta))$對稱於點$(1,\gamma)$。則下列選項何者正確？

   (1) $\alpha=-1$　(2) $\beta=4$　(3) $\gamma=6$　(4) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(-2h)-f(h)}{h}=12$

   (5)若過點$(1,\gamma)$且與$y=f(x)$相切之切線與x軸正向之交角為θ，則$\tan\theta=-4$。

2. 由地面上共線三點A、B、C測得一塔頂P的仰角分別為θ_1、θ_2、θ_3，已知塔底Q與A、B、C不共線，且$\overline{AQ}=100$公尺，$\overline{CQ}=400$公尺，$\overline{AB}=\overline{BC}=150\sqrt{2}$公尺，則下列選項何者正確？

   (1) $\overline{BQ}=250$公尺　(2) θ_1、θ_2、θ_3成等差數列　(3) $\cos\angle APC<0$

   (4) $\cot\theta_1$、$\cot\theta_2$、$\cot\theta_3$成等差數列　(5) $\tan\theta_1$、$\tan\theta_2$、$\tan\theta_3$成等比數列。

3. 設$a=\sqrt{3}\sin 20^\circ+\cos 20^\circ$，$b=\sec 80^\circ-\sqrt{3}\csc 80^\circ$，$c$為$|\sin x|+|\cos x|$的最大值，且$e$為$f(x)=5\sin x-12\cos x$（$0\le x\le\pi$）的最大值，此時$x$為$d$，則下列選項各數值中何者最小？

   (1) $\left(\dfrac{1}{2}\right)^e$　(2) $\tan d$　(3) $\left(\dfrac{1}{2}\right)^c$　(4) $\log_{64}\dfrac{1}{b}$　(5) a。

二、多選題(占 32 分)

4. 空間中三向量$\overrightarrow{a}=(a_1,a_2,a_3)$、$\overrightarrow{b}=(b_1,b_2,b_3)$、$\overrightarrow{c}=(c_1,c_2,c_3)$。

   若$\begin{bmatrix}a_1&a_2&a_3\\b_1&b_2&b_3\\c_1&c_2&c_3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_1&b_1&c_1\\a_2&b_2&c_2\\a_3&b_3&c_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}16&\alpha&\beta\\\alpha&9&-3\\\beta&-3&4\end{bmatrix}$，其中$\alpha$、$\beta$皆為實數，則下列敘述哪些正確？

   (1)向量$\overrightarrow{b}$與$\overrightarrow{c}$的夾角為150°　(2)向量$\overrightarrow{a}+2\overrightarrow{c}$平分$\overrightarrow{a}$與$\overrightarrow{c}$的夾角　(3) $|\overrightarrow{b}\times\overrightarrow{c}|=3$

   (4)當$\alpha=\beta=0$時，則$\overrightarrow{a}$、$\overrightarrow{b}$、$\overrightarrow{c}$三向量所展成的四面體體積為$4\sqrt{3}$

   (5)三向量$3\overrightarrow{a}+2\overrightarrow{b}$、$-2\overrightarrow{c}$及$\overrightarrow{b}-4\overrightarrow{c}$所展成的平行六面體體積的最大值為$72\sqrt{3}$。

5. 設點$A_1(x_1,y_1)$，$A_2(x_2,y_2)$，……，$A_n(x_n,y_n)$，滿足下列線性變化：

   $$\begin{cases}x_n=\dfrac{\sqrt{3}}{3}x_{n-1}+\dfrac{1}{3}y_{n-1}\\[2mm] y_n=\dfrac{-1}{3}x_{n-1}+\dfrac{\sqrt{3}}{3}y_{n-1}\end{cases}$$

   ，$n\ge 2$，n為正整數，且$A_1(x_1,y_1)$為x軸上的點$(3,0)$

。設二階方陣T滿足$\begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix}=T\begin{bmatrix} x_{n-1} \\ y_{n-1} \end{bmatrix}$，令$O$為原點，$\overline{OA_n}$表示原點$O$與點$A_n$連線的長度，$S_{n-1}$表$\Delta OA_{n-1}A_n$的面積，則下列敘述哪些正確？

(1)$T^{-1}=\frac{4}{9}\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{-1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} \end{bmatrix}$　(2)$\frac{\overline{OA_n}}{\overline{OA_{n-1}}}=\frac{4}{9}$　(3)$\sum_{n=1}^{\infty} S_n=\frac{27}{10}$

(4)二階行列式值$\begin{vmatrix} x_3 & y_3 \\ x_6 & y_6 \end{vmatrix}$的絕對值為$\frac{128}{243}$

(5)令$M=3T$，則$65\left(M+M^7+M^{13}+M^{19}+M^{25}\right)=aM$，則實數$a$的整數部分為 9 位數。

6. 在複數平面上，描繪出$Z^{10}=-16+16\sqrt{3}i$的各根所在位置，依逆時針順序連接各點形成一個正十邊形S，則下列敘述何者正確？（已知$\sin 18°=\frac{\sqrt{5}-1}{4}$，$\cos 36°=\frac{\sqrt{5}+1}{4}$）

(1)有 2 個根在第二象限　(2) S的面積大於 6　(3) S的周長為$20\sqrt{2}\sin 36°$

(4)若z為$Z^{10}=-16+16\sqrt{3}i$的其中一根，則$z+\sqrt{2}i$的主輻角一定比$z-\sqrt{2}$的主輻角小

(5)從所有複數根中，任取相異兩根令為w_1、w_2，則$\left|w_1-w_2\right|\le\sqrt{5-\sqrt{5}}$的機率為$\frac{17}{45}$。

7. 空間坐標中，設兩直線L_1：$\frac{x-3}{2}=\frac{y-5}{3}=\frac{3-z}{-2}$、$L_2$：$\frac{x-1}{1}=\frac{y+4}{2}=\frac{z+2}{2}$，平面$E$：$2x-y=6$，若$A$點在$L_1$上，$B$、$C$兩點在$L_2$上，且$\triangle ABC$為正三角形。設有一束雷射光線沿著直線$L_1$射向平面$E$，經反射後的直線為$L_3$，請選出正確的選項：

(1)直線L_1與平面E交於一點P，則P點的z坐標值為-7

(2)直線L_2與平面E平行　(3)若$\triangle ABC$有最小面積時，A點坐標為$(1,2,1)$

(4) $\triangle ABC$的最小面積為$3\sqrt{3}$　(5)直線L_3的方向向量平行於向量$(6,17,-10)$。

三、選填題(占 28 分)

A. 袋中有大小材質均相同的七顆球，其球上編號分別為1，2，3，……，7，若隨機從袋中取出四個球，球號為x、y、z、w，其中$x<y<z<w$，且隨機變數Y的取值為y，期望值為$E(Y)$，則$E(Y)=$________。（化為最簡分數）

B. 令多項式$4(x+1)^{n+1}$除以$(3x-2)^n$所得的餘式為多項式$r_n(x)$，

則$\lim_{n\to\infty}\frac{(-2)^n r_n(1)-r_n(0)}{3(-4)^{n+1}+3^{n-2}}=$________。（化為最簡分數）

C. 若a為實數，設一圓方程式為C：$x^2+y^2+2(a+2)x-2(a+3)y+3a^2+2=0$，
且A、B為圓C與直線$x+y=1$之兩交點。若坐標平面上有一點$P(9,2)$，
則$\triangle ABP$面積的最大值為________。（化為最簡根式）

D. 已知$f(x)=\begin{vmatrix} x+1 & 2 & x+3 \\ 3 & x+2 & x+1 \\ x+2 & x+3 & 1 \end{vmatrix}$，設方程式$f(x-5)=0$的有理根為$\alpha$，
方程式$f\left(x^2-1\right)=0$的正實根為β，若有一四角錐，其底面是邊長為α的正方形，
側稜之稜長為β，則相鄰兩側面所夾之二面角θ之餘弦值為________。（化為最簡根式）

第貳部分：非選擇題(占 22 分)

一.設$\triangle ABC$是邊長為1的正三角形，線段$\overline{BC}$上有n等分點，沿點B到點C的方向，
依次為點P_1、P_2、……、P_{n-1}，其中$n\ge 2$，並令向量內積的和
$S_n=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AP_1}+\overrightarrow{AP_1}\cdot\overrightarrow{AP_2}+\overrightarrow{AP_2}\cdot\overrightarrow{AP_3}+\cdots+\overrightarrow{AP_{n-1}}\cdot\overrightarrow{AC}$
(1)試以n表示向量內積$\overrightarrow{AP_1}\cdot\overrightarrow{AP_2}$。(2)求$S_n$的值。（以$n$表示）(3)求$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{S_n}{n}$。

二.設$f(x)=ax^2+bx+c$為二次實係數多項式，若α、β為$f(x)=0$之二實根，
且$\alpha<\beta$。而$g(x)$是領導係數為-1的三次實係數多項式，且$g'(\alpha)=g'(\beta)=0$，
則：
(1)試證：$\int_{\alpha}^{\beta}\left(ax^2+bx+c\right)dx=\dfrac{a}{6}(\alpha-\beta)^3$。
(2)若函數$y=f(x)$在$x=2$有極值為-9，且$y=f(x)$與x軸所圍成的封閉區域面積為36，試求二次函數$f(x)$。
(3)承(2)，若函數$y=g(x)$的圖形通過坐標原點，且函數$y=g(x)$在區間$[-1,0]$與x軸圍成的圖形為$\Re$。若將$\Re$繞x軸旋轉一圈，試求所得到的旋轉體體積。

RA680 臺中區國立高級中學 106 學年度指定科目第四次
聯合模擬考數學甲

參考答案

第壹部分：選擇題

1.(4) **2.**(5) **3.**(2) **4.**(2)(5) **5.**(3)(4) **6.** (1)(4) **7.** (3)(4)

A. $\frac{16}{5}$ **B.** $-\frac{2}{3}$ **C.** $30\sqrt{2}$ **D.** $-\frac{\sqrt{2}}{2}$

第貳部分：非選擇題

一、(1) $\frac{2n^2-3n+4}{2n^2}$ (2) $\frac{5n^2-2}{6n}$ (3) $\frac{5}{6}$

二、(1) 略 (2) $f(x)=x^2-4x-5$ (3) $\frac{1167}{35}\pi$