中區高中 107 年(106 學年度)高三下
第四次指考模擬考數學(自然組)(106-4)試題

俞克斌老師編寫

第壹部分：選擇題

一、單選題

1. 設 $f(x)$ 爲一實係數多項式函數，滿足：

   Ⅰ. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x^3+\sqrt{2}}=1$ 且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=-4$；

   Ⅱ. $f(x)$ 在 $x=\alpha$、$x=\beta$ 有極值，其中 $\alpha<\beta$，

   且兩點 $(\alpha,f(\alpha))$、$(\beta,f(\beta))$ 對稱於點 $(1,\gamma)$。

   則下列選項何者正確？

   (1) $\alpha=-1$　(2) $\beta=4$　(3) $\gamma=6$　(4) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(-2h)-f(h)}{h}=12$

   (5)若過點 $(1,\gamma)$ 且與 $y=f(x)$ 相切之切線與 x 軸正向之交角爲 θ，則 $\tan\theta=-4$。

   【107 中區模④】

答：(4)

解：$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x^3+\sqrt{2}}=1 \Rightarrow f(x)=x^3+bx^2+cx+d$

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=-4 \Rightarrow f(x)=x^3+bx^2-4x+0$

$f'(x)=3x^2+2bx-4$，$f''(x)=6x+2b\xrightarrow{f''(1)=0}6+2b=0 \Rightarrow b=-3$

故 $f(x)=x^3-3x^2-4x$，$f'(x)=3x^2-6x-4$

故 $\alpha=\dfrac{3-\sqrt{21}}{3}$，$\beta=\dfrac{3+\sqrt{21}}{3}$，$r=-6$

$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(0-2h)-f(0+h)}{h}=(-2-1)f'(0)=(-3)(-4)=12$

切點 $(1,-6)$，斜率 $-7=\tan\theta$

2. 由地面上共線三點 A、B、C 測得一塔頂 P 的仰角分別爲 θ_1、θ_2、θ_3，

   已知塔底 Q 與 A、B、C 不共線，且 $\overline{AQ}=100$ 公尺，$\overline{CQ}=400$ 公尺，

   $\overline{AB}=\overline{BC}=150\sqrt{2}$ 公尺，則下列選項何者正確？

   (1) $\overline{BQ}=250$ 公尺　(2) θ_1、θ_2、θ_3 成等差數列　(3) $\cos\angle APC<0$

   (4) $\cot\theta_1$、$\cot\theta_2$、$\cot\theta_3$ 成等差數列　(5) $\tan\theta_1$、$\tan\theta_2$、$\tan\theta_3$ 成等比數列。

   【107 中區模④】

答：(5)

解：(1) $100^2+400^2=2\left(\overline{BQ}^2+\left(150\sqrt{2}\right)^2\right) \Rightarrow \overline{BQ}=200$

(3) $\cos\angle AQC<0 \Rightarrow \angle AQC$ 爲鈍角 $\Rightarrow \angle APC$ 可能爲鈍、直、銳角

(2)(4)(5) $\cot\theta_1=\dfrac{100}{h}$，$\cot\theta_2=\dfrac{200}{h}$，$\cot\theta_3=\dfrac{400}{h}$ 成等比

$\tan\theta_1=\dfrac{h}{100}$，$\tan\theta_2=\dfrac{h}{200}$，$\tan\theta_3=\dfrac{h}{400}$ 成等比

$$\tan\left(\theta_1+\theta_3\right)=\frac{\dfrac{h}{100}+\dfrac{h}{400}}{1-\dfrac{h}{100}\times\dfrac{h}{400}}\neq\tan2\theta_2=\frac{2\times\dfrac{h}{200}}{1-\left(\dfrac{h}{200}\right)^2}$$

$\Rightarrow\theta_1+\theta_3\neq2\theta_2\ \Rightarrow\theta_1,\theta_2,\theta_3$ 不成等差

3. 設 $a=\sqrt{3}\sin20^\circ+\cos20^\circ$，$b=\sec80^\circ-\sqrt{3}\csc80^\circ$，$c$ 爲 $|\sin x|+|\cos x|$ 的最大值，
且 e 爲 $f\left(x\right)=5\sin x-12\cos x$（$0\le x\le\pi$）的最大值，此時 x 爲 d，
則下列選項各數值中何者最小？
(1) $\left(\dfrac{1}{2}\right)^e$ (2) $\tan d$ (3) $\left(\dfrac{1}{2}\right)^c$ (4) $\log_{64}\dfrac{1}{b}$ (5) a。 【107 中區模④】

答：(2)

解：$a=2\left[\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin20^\circ+\dfrac{1}{2}\cos20^\circ\right]=2\sin\left(20^\circ+30^\circ\right)=2\sin50^\circ\ \Rightarrow1<a<\sqrt{3}$

$$b=\frac{1}{\cos80^\circ}-\frac{\sqrt{3}}{\sin80^\circ}=\frac{\sin80^\circ-\sqrt{3}\cos80^\circ}{\sin80^\circ\cos80^\circ}=\frac{2\sin\left(80^\circ-60^\circ\right)}{\dfrac{1}{2}\sin160^\circ}=4，\log_{64}\frac{1}{b}=\frac{-1}{3}$$

$1\le|\sin x|+|\cos x|\le\sqrt{2}\ \Rightarrow c=\sqrt{2}$，$0<\left(\dfrac{1}{2}\right)^c<\dfrac{1}{2}$

當 $\sin x=\dfrac{5}{13}$，$\cos x=\dfrac{-12}{13}$ 時，$f\left(x\right)$ 有最大值 13 $\Rightarrow\tan d=\dfrac{5}{-12}$，$e=13$

故(2)<(4)<0 <(1)<(3)<(5)

二、多選題

4. 空間中三向量 $\overrightarrow{a}=\left(a_1,a_2,a_3\right)$、$\overrightarrow{b}=\left(b_1,b_2,b_3\right)$、$\overrightarrow{c}=\left(c_1,c_2,c_3\right)$。

若 $\begin{bmatrix}a_1&a_2&a_3\\b_1&b_2&b_3\\c_1&c_2&c_3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_1&b_1&c_1\\a_2&b_2&c_2\\a_3&b_3&c_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}16&\alpha&\beta\\\alpha&9&-3\\\beta&-3&4\end{bmatrix}$，其中 α、β 皆爲實數，

則下列敘述哪些正確？

(1)向量 $\overrightarrow{b}$ 與 $\overrightarrow{c}$ 的夾角爲 150° (2)向量 $\overrightarrow{a}+2\overrightarrow{c}$ 平分 $\overrightarrow{a}$ 與 $\overrightarrow{c}$ 的夾角 (3) $\left|\overrightarrow{b}\times\overrightarrow{c}\right|=3$

(4)當 $\alpha=\beta=0$ 時，則 $\overrightarrow{a}$、$\overrightarrow{b}$、$\overrightarrow{c}$ 三向量所展成的四面體體積爲 $4\sqrt{3}$

(5)三向量 $3\overrightarrow{a}+2\overrightarrow{b}$、$-2\overrightarrow{c}$ 及 $\overrightarrow{b}-4\overrightarrow{c}$ 所展成的平行六面體體積的最大值爲 $72\sqrt{3}$。

【107 中區模④】

答：(2)(5)

解：(1) $\cos\theta_1=\dfrac{\overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{c}}{\left|\overrightarrow{b}\right|\left|\overrightarrow{c}\right|}=\dfrac{-3}{\sqrt{9}\sqrt{4}}=-\dfrac{1}{2}\Rightarrow\theta_1=120^\circ$

(2) $|\overrightarrow{a}|=4$、$|\overrightarrow{c}|=2 \Rightarrow \overrightarrow{a}+2\overrightarrow{c}$平分$\overrightarrow{a}$、$\overrightarrow{c}$夾角

(3) $|\overrightarrow{b}\times\overrightarrow{c}|=|\overrightarrow{b}||\overrightarrow{c}|\sin120^\circ=3\times2\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=3\sqrt{3}$

(4) $\alpha=0$ 表$\overrightarrow{a}\perp\overrightarrow{b}$，$\beta=0$ 表$\overrightarrow{a}\perp\overrightarrow{c}$

$\Rightarrow\overrightarrow{a}$、$\overrightarrow{b}$、$\overrightarrow{c}$所展成之四面體體積$=\dfrac{1}{3}\times\left(\dfrac{1}{2}\times3\sqrt{3}\right)\times4=2\sqrt{3}$

(5) $\left\| \begin{vmatrix}3&2&0\\0&0&-2\\0&1&-4\end{vmatrix}\times\begin{vmatrix}\overrightarrow{a}\\\overrightarrow{b}\\\overrightarrow{c}\end{vmatrix}\right\| \le 6\times\left[3\sqrt{3}\times4\right]=72\sqrt{3}$

5. 設點$A_1(x_1,y_1)$，$A_2(x_2,y_2)$，……，$A_n(x_n,y_n)$，滿足下列線性變化：
$\begin{cases} x_n=\dfrac{\sqrt{3}}{3}x_{n-1}+\dfrac{1}{3}y_{n-1} \\ y_n=\dfrac{-1}{3}x_{n-1}+\dfrac{\sqrt{3}}{3}y_{n-1}\end{cases}$，$n\ge2$，$n$爲正整數，且$A_1(x_1,y_1)$爲$x$軸上的點$(3,0)$。設二階方陣$T$滿足$\begin{bmatrix}x_n\\y_n\end{bmatrix}=T\begin{bmatrix}x_{n-1}\\y_{n-1}\end{bmatrix}$，令$O$爲原點，$\overline{OA_n}$表示原點$O$與點$A_n$連線的長度，$S_{n-1}$表$\Delta OA_{n-1}A_n$的面積，則下列敘述哪些正確？

(1) $T^{-1}=\dfrac{4}{9}\begin{bmatrix}\dfrac{\sqrt{3}}{3}&\dfrac{-1}{3}\\\dfrac{1}{3}&\dfrac{\sqrt{3}}{3}\end{bmatrix}$ (2) $\dfrac{\overline{OA_n}}{\overline{OA_{n-1}}}=\dfrac{4}{9}$ (3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}S_n=\dfrac{27}{10}$

(4)二階行列式值$\begin{vmatrix}x_3&y_3\\x_6&y_6\end{vmatrix}$的絕對值爲$\dfrac{128}{243}$

(5)令$M=3T$，則$65\left(M+M^7+M^{13}+M^{19}+M^{25}\right)=aM$，則實數$a$的整數部分爲9位數。 【107 中區模④】

答：(3)(4)

解：$\begin{bmatrix}x_n\\y_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\dfrac{\sqrt{3}}{3}&\dfrac{1}{3}\\-\dfrac{1}{3}&\dfrac{\sqrt{3}}{3}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_{n-1}\\y_{n-1}\end{bmatrix}$，$T=\begin{bmatrix}\dfrac{\sqrt{3}}{3}&\dfrac{1}{3}\\-\dfrac{1}{3}&\dfrac{\sqrt{3}}{3}\end{bmatrix}$表旋轉矩陣

(1) $T^{-1}=\dfrac{9}{4}\begin{bmatrix}\dfrac{\sqrt{3}}{3}&-\dfrac{1}{3}\\\dfrac{1}{3}&\dfrac{\sqrt{3}}{3}\end{bmatrix}$

(2) $\dfrac{\overline{OA_n}}{\overline{OA_{n-1}}}=\sqrt{\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)^2+\left(-\dfrac{1}{3}\right)^2}=\dfrac{2}{3}$，$\tan\theta=\dfrac{\frac{1}{3}}{\frac{\sqrt{3}}{3}}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}\Rightarrow\theta=30^\circ$

(3) S_1 表 ΔOA_1A_2 面積 $=\dfrac{1}{2}\times3\times2\times\sin30^\circ=\dfrac{3}{2}\Rightarrow\sum\limits_{n=1}^{\infty}S_n=\dfrac{\frac{3}{2}}{1-\left(\frac{2}{3}\right)^2}=\dfrac{27}{10}$

(4) $\left\|\begin{matrix}x_3 & y_3\\ x_6 & y_6\end{matrix}\right\|=\overrightarrow{OA_3}$ 與 $\overrightarrow{OA_6}$ 所圍平行四邊形面積 $=\overline{OA_3}\times\overline{OA_6}\times\sin90^\circ$

$=\left[3\times\left(\dfrac{2}{3}\right)^2\right]\left[3\times\left(\dfrac{2}{3}\right)^5\right]\times1=\dfrac{128}{243}$

(5) $M=3T=\begin{bmatrix}\sqrt{3} & 1\\ -1 & \sqrt{3}\end{bmatrix}=2\begin{bmatrix}\cos(-30^\circ) & -\sin(-30^\circ)\\ \sin(-30^\circ) & \cos(-30^\circ)\end{bmatrix}\Rightarrow M^6=-64I$

原式 $=65M\left(I+M^6+M^{12}+M^{18}+M^{24}\right)=aM$

$\Rightarrow a=65\left(1-64+(-64)^2+(-64)^3+(-64)^4\right)=65\times\dfrac{1\left[1-(-64)^5\right]}{1-(-64)}=1+64^5$

$\Rightarrow \log a\fallingdotseq\log64^5=\log_2^{30}=30\times0.3010=9.03$，表 a 爲 10 位數

6. 在複數平面上，描繪出 $Z^{10}=-16+16\sqrt{3}i$ 的各根所在位置，依逆時針順序連接各點形成一個正十邊形 S，則下列敘述何者正確？（已知 $\sin18^\circ=\dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$，$\cos36^\circ=\dfrac{\sqrt{5}+1}{4}$）

(1)有 2 個根在第二象限　(2) S 的面積大於 6　(3) S 的周長爲 $20\sqrt{2}\sin36^\circ$

(4)若 z 爲 $Z^{10}=-16+16\sqrt{3}i$ 的其中一根，則 $z+\sqrt{2}i$ 的主輻角一定比 $z-\sqrt{2}$ 的主輻角小

(5)從所有複數根中，任取相異兩根令爲 w_1、w_2，則 $\left|w_1-w_2\right|\le\sqrt{5-\sqrt{5}}$ 的機率爲 $\dfrac{17}{45}$。　【107 中區模④】

答：(1)(4)

解：$Z^{10}=32\left[-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right]=2^5\left[\cos\left(120^\circ+360^\circ k\right)+i\sin\left(120^\circ+360^\circ k\right)\right]$

$Z=\sqrt{2}\left[\cos\left(12^\circ+36^\circ k\right)+i\sin\left(12^\circ+36^\circ k\right)\right]$，$k=0$，1，2，……，9

(1)當 $k=0$，1，2，$Z\in$ Ⅰ；$k=3$，4，$Z\in$ Ⅱ；$k=5$，6，7 $\in$ Ⅲ；$k=8$，9 $\in$ Ⅳ

(2) S 面積 $=\left(\dfrac{1}{2}\times\sqrt{2}\times\sqrt{2}\times\sin36^\circ\right)\times10\fallingdotseq5.8\cdots\cdots<6$

(3) S 周長 $=10\times\sqrt{\left(\sqrt{2}\right)^2+\left(\sqrt{2}\right)^2-2\times\sqrt{2}\times\sqrt{2}\times\cos36^\circ}=20\sqrt{2}\sin18^\circ$

(4) $Arg\left(z+\sqrt{2}i\right)=Arg(z)+45^\circ<Arg\left(z-\sqrt{2}\right)=Arg(z)+90^\circ$

$(5)\cos\theta=\dfrac{\left(\sqrt{2}\right)^2+\left(\sqrt{2}\right)^2-\left(\sqrt{5-\sqrt{5}}\right)^2}{2\times\sqrt{2}\times\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{5}-1}{4}\Rightarrow\theta=72^\circ$ 或 -72°

所求機率 $=\dfrac{10\times2}{10\times9}=\dfrac{2}{9}$

7. 空間坐標中，設兩直線 L_1：$\dfrac{x-3}{2}=\dfrac{y-5}{3}=\dfrac{3-z}{-2}$、$L_2$：$\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+4}{2}=\dfrac{z+2}{2}$，
平面 E：$2x-y=6$，若 A 點在 L_1 上，B、C 兩點在 L_2 上，且 ΔABC 爲正三角形。
設有一束雷射光線沿著直線 L_1 射向平面 E，經反射後的直線爲 L_3，
請選出正確的選項：
(1)直線 L_1 與平面 E 交於一點 P，則 P 點的 z 坐標值爲 -7
(2)直線 L_2 與平面 E 平行　(3)若 ΔABC 有最小面積時，A 點坐標爲 $(1,2,1)$
(4) ΔABC 的最小面積爲 $3\sqrt{3}$　(5)直線 L_3 的方向向量平行於向量 $(6,17,-10)$。
【107 中區模④】

答：(3)(4)

解：(1) L_1 上動點 $P(3+2t,5+3t,3+2t)\in E\Rightarrow t=5$，交點 $M(13,20,13)$

(2) $\overrightarrow{L_2}\cdot\overrightarrow{E}=(1,2,2)\cdot(2,-1,0)=0$，點 $(1,-4,-2)\in E$，表 $L_2\subset E$

(3) L_2 上動點 $Q(1+s,-4+2s,-2+2s)$

$\overrightarrow{PQ}=(s-2t-2,2s-3t-9,2s-2t-5)$

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{L_1}=0\Rightarrow12s-17t-41=0\\\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{L_2}=0\Rightarrow9s-12t-30=0\end{array}\right\}s=2，t=-1$$

(4)當 $P(1,2,1)=A$，$Q(3,0,2)$ 時，ΔABC 面積 $Min=3\sqrt{3}$

(5) L_1 上定點 $G(3,5,3)$ 關於 E 之對稱點 $H(7,3,3)$

$\overrightarrow{HM}=(-6,-17,-10)//(6,17,10)$

三、選塡題

A. 袋中有大小材質均相同的七顆球，其球上編號分別爲1，2，3，……，7，
若隨機從袋中取出四個球，球號爲 x、y、z、w，其中 $x<y<z<w$，
且隨機變數 Y 的取值爲 y，期望值爲 $E(Y)$，則 $E(Y)=$ ________。（化爲最簡分數）
【107 中區模④】

答：$\dfrac{16}{5}$

解：$E(Y)=2\times\dfrac{C_1^1C_1^1C_2^5}{C_4^7}+3\times\dfrac{C_1^2C_1^1C_2^4}{C_4^7}+4\times\dfrac{C_1^3C_1^1C_2^3}{C_4^7}+5\times\dfrac{C_1^4C_1^1C_2^2}{C_4^7}$

$=\dfrac{1}{35}\left[2\times10+3\times12+4\times9+5\times4\right]=\dfrac{16}{5}$

B. 令多項式 $4(x+1)^{n+1}$ 除以 $(3x-2)^n$ 所得的餘式為多項式 $r_n(x)$，

則 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(-2)^n\, r_n(1)-r_n(0)}{3(-4)^{n+1}+3^{n-2}}=$________。（化為最簡分數） 【107 中區模④】

答：$-\dfrac{2}{3}$

解：$4(x+1)^{n+1}=(3x-2)^n\times\left[\dfrac{4}{3^n}x+p\right]+r_n(x)$

$r_n(0)=4-(-2)^n\,p$，$r_n(1)=4\times2^{n+1}-\left(\dfrac{4}{3^n}+p\right)$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(-2)^n\times\left[4\times2^{n+1}-\dfrac{4}{3^n}-p\right]-\left[4-(-2)^n\,p\right]}{3(-4)^{n+1}+3^{n-2}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{8-4\times\dfrac{1}{6^n}-\left(\dfrac{1}{2}\right)^n\times p-4\left(\dfrac{1}{-4}\right)^n-\left(\dfrac{1}{2}\right)^n p}{3\times(-4)+\left(\dfrac{3}{-4}\right)^n\times\dfrac{1}{9}}=\frac{8}{-12}=\frac{2}{-3}$$

C. 若 a 為實數，設一圓方程式為 C：$x^2+y^2+2(a+2)x-2(a+3)y+3a^2+2=0$，且 A、B 為圓 C 與直線 $x+y=1$ 之兩交點。若坐標平面上有一點 $P(9,2)$，則 ΔABP 面積的最大值為________。（化為最簡根式） 【107 中區模④】

答：$30\sqrt{2}$

解：C：$[x+(a+2)]^2+[y-(a+3)]^2=-a^2+10a+11>0$，$-1<a<11$

圓心 $O(-a-2,a+3)$，半徑 $\sqrt{-a^2+10a+11}=\sqrt{-(a-5)^2+36}$

$O\in x+y=1$，表 $\overline{AB}$ 為直徑，ΔABP 面積最大值

$d(P,L)\times\overline{AB}\times\dfrac{1}{2}\le\dfrac{|9+2-1|}{\sqrt{2}}\times12\times\dfrac{1}{2}=30\sqrt{2}$

D. 已知 $f(x)=\begin{vmatrix}x+1 & 2 & x+3\\ 3 & x+2 & x+1\\ x+2 & x+3 & 1\end{vmatrix}$，設方程式 $f(x-5)=0$ 的有理根為 α，

方程式 $f\left(x^2-1\right)=0$ 的正實根為 β，若有一四角錐，其底面是邊長為 α 的正方形，

側稜之稜長為 β，則相鄰兩側面所夾之二面角 θ 之餘弦值為________。（化為最簡根式） 【107 中區模④】

答：$\dfrac{-\sqrt{2}}{2}$

解：$f(x)=(2x+6)\begin{vmatrix}1 & 2 & x+3\\ 1 & x+2 & x+1\\ 1 & x+3 & 1\end{vmatrix}=(2x+6)\begin{vmatrix}1 & 2 & x+3\\ 0 & x & -2\\ 0 & x+1 & -x-2\end{vmatrix}$

$=(2x+6)\left[-x^2+2\right]$

$f(x-5)=(2x-4)\left[-(x-5)^2+2\right]=0\Rightarrow\alpha=2$

$f\left(x^2-1\right)=\left(2\left(x^2-1\right)+6\right)\left[-\left(x^2-1\right)^2+2\right]=0\Rightarrow\beta=\sqrt{\sqrt{2}+1}$

側稜上的高$=\dfrac{2\times\sqrt{\sqrt{2}}}{\sqrt{\sqrt{2}+1}}=2\sqrt{\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1}}=2\sqrt{\sqrt{2}\left(\sqrt{2}-1\right)}=2\sqrt{2-\sqrt{2}}$

$$\cos\theta=\frac{\left(2\sqrt{2-\sqrt{2}}\right)^2+\left(2\sqrt{2-\sqrt{2}}\right)^2-\left(2\sqrt{2}\right)^2}{2\left(2\sqrt{2-\sqrt{2}}\right)\left(2\sqrt{2-\sqrt{2}}\right)}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

第貳部分：非選擇題

1. 設ΔABC是邊長爲1的正三角形，線段$\overline{BC}$上有n等分點，沿點B到點C的方向，依次爲點P_1、P_2、……、P_{n-1}，其中$n\geq 2$，並令向量內積的和
$S_n=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AP_1}+\overrightarrow{AP_1}\cdot\overrightarrow{AP_2}+\overrightarrow{AP_2}\cdot\overrightarrow{AP_3}+\cdots\cdots+\overrightarrow{AP_{n-1}}\cdot\overrightarrow{AC}$
(1)試以n表示向量內積$\overrightarrow{AP_1}\cdot\overrightarrow{AP_2}$。
(2)求S_n的值。（以n表示）
(3)求$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{S_n}{n}$。 【107 中區模④】

答：(1)$\dfrac{2n^2-3n+4}{2n^2}$ (2)$\dfrac{5n^2-2}{6n}$ (3)$\dfrac{5}{6}$

解：(1)$\overrightarrow{AP_1}\cdot\overrightarrow{AP_2}=\left[\dfrac{n-1}{n}\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{n}\overrightarrow{AC}\right]\cdot\left[\dfrac{n-2}{n}\overrightarrow{AB}+\dfrac{2}{n}\overrightarrow{AC}\right]$

$=\dfrac{n^2-3n+2}{n^2}\cdot 1^2+\dfrac{2n-2+n-2}{n^2}\cdot 1^2\cdot\cos 60^\circ+\dfrac{2}{n^2}\cdot 1^2$

$=\dfrac{2n^2-3n+4}{2n^2}$

(2)$\overrightarrow{AP_k}\cdot\overrightarrow{AP_{k+1}}=\left[\dfrac{n-k}{n}\overrightarrow{AB}+\dfrac{k}{n}\overrightarrow{AC}\right]\cdot\left[\dfrac{n-k-1}{n}\overrightarrow{AB}+\dfrac{k+1}{n}\overrightarrow{AC}\right]$

$=\dfrac{n^2-(2k+1)n+k^2+k}{n^2}+\dfrac{-2k^2+(2k+1)n-2k}{n^2}\cdot\dfrac{1}{2}+\dfrac{k^2+k}{n^2}$

$$=\frac{2k^2+(2-2n)k+2n^2-n}{2n^2}$$

$$S_n=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{2k^2+(2-2n)k+2n^2-n}{2n^2}=\frac{5n^2-2}{6n}$$

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{S_n}{n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{5n^2-2}{6n^2}=\frac{5}{6}$

2. 設 $f(x)=ax^2+bx+c$ 爲二次實係數多項式，若 α 、β 爲 $f(x)=0$ 之二實根，且 $\alpha<\beta$。而 $g(x)$ 是領導係數爲 -1 的三次實係數多項式，且 $g'(\alpha)=g'(\beta)=0$，則：

(1)試證：$\int_\alpha^\beta\left(ax^2+bx+c\right)dx=\frac{a}{6}(\alpha-\beta)^3$。

(2)若函數 $y=f(x)$ 在 $x=2$ 有極值爲 -9，且 $y=f(x)$ 與 x 軸所圍成的封閉區域面積爲36，試求二次函數 $f(x)$。

(3)承(2)，若函數 $y=g(x)$ 的圖形通過坐標原點，且函數 $y=g(x)$ 在區間 $[-1,0]$ 與 x 軸圍成的圖形爲 $\Re$。若將 $\Re$ 繞 x 軸旋轉一圈，試求所得到的旋轉體體積。

【107 中區模④】

答：(1)如下　(2) $f(x)=x^2-4x-5$　(3) $\frac{1167}{35}\pi$

解：(1) $\int_\alpha^\beta\left(ax^2+bx+c\right)dx=\int_\alpha^\beta a(x-\alpha)(x-\beta)dx=a\int_\alpha^\beta\left(x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta\right)dx$

$$=a\left[\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}(\alpha+\beta)x^2+\alpha\beta x+c\right]_\alpha^\beta$$

$$=a\left[\frac{\beta^3-\alpha^3}{3}-\frac{(\alpha+\beta)\left(\beta^2-\alpha^2\right)}{2}+\alpha\beta(\beta-\alpha)\right]$$

$$=\frac{a(\beta-\alpha)}{6}\left[2\left(\beta^2+\beta\alpha+\alpha^2\right)-3(\beta+\alpha)^2+6\beta\alpha\right]$$

$$=\frac{a(\beta-\alpha)}{6}\left[-\left(\beta^2-2\beta\alpha+\alpha^2\right)\right]$$

$$=\frac{-a(\beta-\alpha)^3}{6}=\frac{a(\alpha-\beta)^3}{6}$$

(2) $f(x)=a(x-2)^2-9=ax^2-4ax+(4a-9)$，$a>0$

$$\int_{2-\frac{3}{\sqrt{a}}}^{2+\frac{3}{\sqrt{a}}}\left[a(x-2)^2-9\right]dx=\frac{a\left(-\frac{6}{\sqrt{a}}\right)^3}{6}=-36\Rightarrow a=1$$

$\therefore f(x)=(x-2)^2-9=x^2-4x-5$　　$\therefore g'(x)=-3\left(x^2-4x-5\right)$

(3) $g(x)=-x^3+6x^2+15x+c\xrightarrow{\text{過}(0,0)}c=0$

$$
\begin{aligned}
\text{所求} &= \int_{-1}^{0} \pi\left(-x^3+6x^2+15x\right)^2 dx \\
&= \int_{-1}^{0} \pi\left(x^6-12x^5+6x^4+180x^3+225x^2\right)dx \\
&= \pi\left[\frac{1}{7}x^7-2x^6+\frac{6}{5}x^5+45x^4+75x^3\right]_{-1}^{0} \\
&= \frac{1167}{35}\pi
\end{aligned}
$$