全國公私立高級中學 106 學年度指定科目
第六次聯合模擬考(數學甲)

RA681

第壹部分：選擇題(占 76 分)

一、 單選題(占 24 分)

1. 公司辦理年終抽獎活動，箱中準備有 10 個大小相同的球，其中 5 個白球，5 個紅球。可選擇甲或乙兩種遊戲規則。甲：一次隨機取出 3 球；乙：一次隨機取出 1 球，取後放回，連續取 3 次。若共抽出 1 顆紅球，可得獎金 1000 元；2 顆紅球，可得獎金 3000 元；3 顆紅球，可得獎金 6000 元。則關於此兩種規則獎金期望值的敘述，請選出正確的選項。
(1) 兩者的獎金期望值相同
(2) 甲的獎金期望值大於乙的獎金期望值，差距小於 100 元
(3) 甲的獎金期望值大於乙的獎金期望值，差距大於 100 元
(4) 甲的獎金期望值小於乙的獎金期望值，差距小於 100 元
(5) 甲的獎金期望值小於乙的獎金期望值，差距大於 100 元

2. 某個手機程式，每次點擊螢幕上的數 a 後，螢幕上的數會變成 $\sqrt{a}$ 。若一開始螢幕上的數為 2，當連續點擊螢幕五次後，螢幕上的數最接近下列哪一個選項？
(1) 0.94　(2) 1.02　(3) 1.07　(4) 1.15　(5) 1.24

常用對數表 $\log_{10} N$

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	0000	0043	0086	0128	0170	0212	0253	0294	0334	0374
11	0414	0453	0492	0531	0569	0607	0645	0682	0719	0755
12	0792	0828	0864	0899	0934	0969	1004	1038	1072	1106
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
20	3010	3032	3054	3075	3096	3118	3139	3160	3181	3201

3. 空間中給定三點 $A(1,0,0)$ 、 $B(0,1,0)$ 、 $C(0,0,1)$ 。考慮另外三點 $P(2,\sqrt{3},\sqrt{2})$ 、 $Q(\pi,2,1)$ 、 $R(1,2,\log_4 32)$ 。令四面體 P-ABC 的體積為 p、四面體 Q-ABC 的體積為 q、四面體 R-ABC 的體積為 r，請選出正確的選項。
(1) $p>q>r$　(2) $p>r>q$　(3) $q>p>r$　(4) $q>r>p$　(5) $r>q>p$

4. 已知複數 $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$，(其中 $r>0$ ， $0\le\theta<2\pi$ ， $i=\sqrt{-1}$)，且滿足 $|\sqrt{3}+2i-z|=1$ 。請選出 $\tan\theta$ 的最小值為下列哪一個選項。
(1) $\frac{1}{2}$　(2) $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$　(3) $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{3}}{2}$　(4) $\frac{2-\sqrt{2}}{2}$　(5) $\frac{2\sqrt{3}-\sqrt{6}}{2}$

二、 多選題(占 24 分)

5. 假設△ABC 中 $\angle A$ 、 $\angle B$ 、 $\angle C$ 的所對三邊長分別為 a、b、c。請選出△ABC 必為鈍角三角形的選項。(1) $|a-b|<c$　(2) $a^2+b^2<c^2$　(3) $\sin 2A<0$　(4) $\cos A\cos B<\sin A\sin B$
(5)內積 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB}<\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CB}$

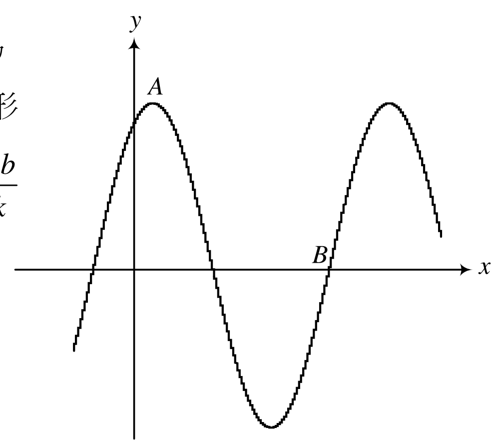
6. 令 $f(x)=x^4-6x^3+7x^2+7x+k$ 。已知 a、b、c 是方程式 $f(x)=0$ 的三個正實根， $a<b<c$ 且 $\lim\limits_{x\to-1}\frac{f(x)}{x+1}$ 存在。請選出正確的選項。
(1) $k>0$　(2) $\lim\limits_{x\to-1}\frac{f(x)}{x+1}>0$　(3) a、b、c 至少有一個在 0 與 1 之間
(4) $f(x)=0$ 恰有一個有理數解　(5)無窮數列 $\langle a^n\rangle$ 、 $\langle b^n\rangle$ 、 $\langle c^n\rangle$ 皆不是收斂數列

7. 平面坐標中，四點 $A(-1,0)$ 、 $B(1,0)$ 、 $P(-1,4)$ 、 $Q(1,2)$ 。已知 R 為 $\overline{PQ}$ 上的動點，圓 C 為 $\triangle ABR$ 的外接圓。請選出正確的選項。
(1)若 $\triangle ABR$ 為等腰三角形，則邊長為 $2+2\sqrt{10}$
(2)若 $\angle ARB=30^\circ$ ，則圓 C 的面積為 4π
(3)當 $\triangle ABR$ 面積恰為四邊形 $ABQP$ 面積一半時，圓 C 的面積為 3π
(4)若圓 C 和 $\overline{PQ}$ 相切，則點 R 恰為點 Q
(5)若點 R 的 x 坐標為 a，則圓 C 的 y 坐標為 $\dfrac{a^2+4a-3}{3-a}$

三、**選填題(占 28 分)**

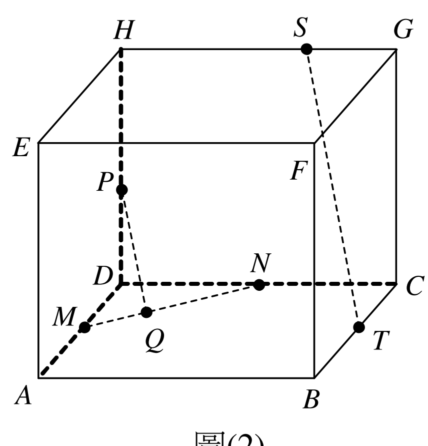
A. 研究發現某地居民有 15%帶有甲種病毒，且甲種病毒帶菌者中罹患肝癌的比例佔 $a\%$，而非甲種病毒帶菌者中罹患肝癌的比例佔 $b\%$。若 100 個肝癌患者中有 90 個是甲種病毒帶菌者，則比值 $\dfrac{a}{b}=$__________ 。

B. 圖(1)為 $y=a\sin kx+b\cos kx$ 的函數圖形，a、b、k 為正實數。 $A(\dfrac{\pi}{24},4)$ 為圖形的最高點， $B(\dfrac{5\pi}{12},0)$ 為圖形和 x 軸的交點，若 $0\le\theta\le 2\pi$ ，則所有滿足 $\tan\theta=\dfrac{ab}{k}$ 的 θ 值總和為____________ 。(化為最簡分數)



圖(1)

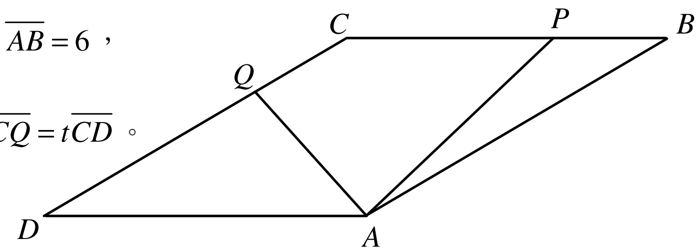
C. 如圖(2)，在空間中，A、B、C、D、E、F、G、H 為邊長 6 的正立方體八個頂點。已知 M、N 分別為 $\overline{AD}$ 、 $\overline{CD}$ 的中點，P、Q 分別在 $\overline{DH}$ 、 $\overline{MN}$ 上，S、T 分別在 $\overline{HG}$ 、 $\overline{BC}$ 上，且 $\overline{HS}=2\overline{GS}$ ， $\overline{BT}=\overline{CT}$ ，若 $\overline{PQ}//\overline{ST}$ ，則 $\overline{PQ}$ 的長度為_____________ 。(化成最簡分數)



圖(2)

第貳部分：非選擇題(占 24 分)

一、如圖(3)，已知平行四邊形 $ABCD$ 邊長 $\overline{AB}=6$，$\overline{AD}=3\sqrt{3}$，$\angle BAD=150^\circ$。又 P、Q 分別在 $\overline{BC}$、$\overline{CD}$ 上，且 $\overline{BC}=3\overline{BP}$，$\overline{CQ}=t\overline{CD}$。



圖(3)

(1) 若將向量 $\overrightarrow{AP}$ 以向量 $\overrightarrow{AB}$ 及 $\overrightarrow{AC}$ 表示，即 $\overrightarrow{AP}=a\overrightarrow{AB}+b\overrightarrow{AC}$，則 a，b 之值為何？並利用 t 將 $\overrightarrow{AQ}$ 以向量 $\overrightarrow{AB}$ 及 $\overrightarrow{AC}$ 表示。(3 分)

(2) 承第(1)題，若 $\angle PAQ=90^\circ$，此時 t 之值為何？(5 分)

(3) 承第(2)題，求此時$\triangle APQ$ 之面積。(5 分)

三、 已知二階方陣 $A=\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$，$ab<0$ 且矩陣 A^3 為一轉移矩陣。

(1) a，b 之值為何？(6 分)

(2) 已知平面三點 $P(1,0)$、$Q(2,4)$、$R(-2,3)$，當經過方陣 A 定義的線性變換，可將 P 映射到 P'，Q 映射到 Q' 且將 R 映射到 R'。試求△ $P'Q'R'$ 的面積。(5 分)

RA681 全國公私立高級中學 106 學年度指定科目
第六次聯合模擬考(數學甲)　參考答案

第壹部分：選擇題

1.(4)　**2.**(2)　**3.**(4)　**4.**(5)　**5.**(2)(3)(5)　**6.**(3)(4)　**7.**(2)(4)

選填題

A. 51　**B.** $\frac{5\pi}{3}$　**C.** 4　**D.** $\frac{21}{5}$

第貳部分：非選擇題

一、(1) $\overrightarrow{AQ}=\overrightarrow{AC}-t\,\overrightarrow{AB}$　(2) $\frac{1}{3}$　(3) $\frac{7\sqrt{3}}{2}$

二、(1) $\frac{\sqrt{3}}{2}$　(2) $\frac{15}{2}$