

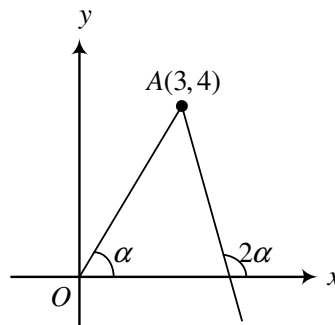
臺北區高中 106 學年度第二學期指定科目第二次模擬考數學甲



一、單選題 (占 24 分)

1. 設 $\log f(x)$ 為 x 之一次實係數多項式且 $f(2) = 8$, $f(4) = 24$, 則 $f(6)$ 之值為下列哪一個選項? (1) 40 (2) 48 (3) 56 (4) 64 (5) 72
2. 設甲袋中有 1 號球 1 個、2 號球 2 個、……、9 號球 9 個; 乙袋中有 1 號球 9 個、2 號球 8 個、……、9 號球 1 個。今自兩袋中各隨機取一球, 且每顆球被選取到的機會相等。若此兩球同為 k 號球的機率為 $P(k)$, $k=1, 2, 3, \dots, 9$, 試求當 k 值為多少時機率最大。(1) 1 (2) 3 (3) 5 (4) 7 (5) 9

3. 如右圖, O 為原點, $A(3, 4)$, \overline{OA} 與 x 軸正向的交角為 α , 試求過 A 點且與 x 軸正向的交角為 2α 之直線方程式為何?
 (1) $3x + 4y = 25$ (2) $4x + 3y = 24$ (3) $24x - 7y = 44$
 (4) $24x + 7y = 100$ (5) $7x + 24y = 117$



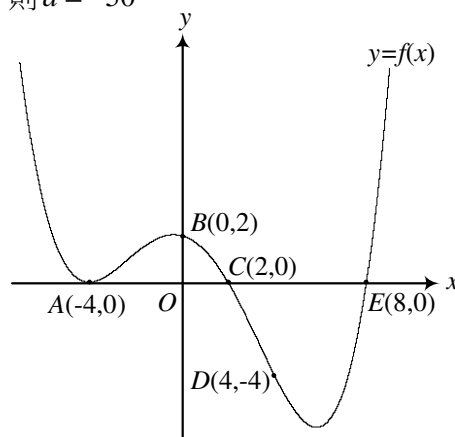
4. 近年來臺灣空氣品質問題日趨嚴重, 其中又以 PM2.5 對人體影響最甚 (PM2.5 是指其懸浮微粒「小於或等於 2.5 微米 (μm)」的粒子)。故環保局明訂規範, 現今流行的路跑活動, 若遇活動當天空氣品質 PM2.5 為「紫爆」等級 (屬於第 10 級的狀況, PM2.5 在每立方公尺有 71 微克以上), 必須立刻停辦路跑活動。某行銷公司將於本週六辦理路跑活動, 先前已決議若遇「紫爆」則活動延期至週日, 週日再遇「紫爆」此路跑賽事便取消。行銷公司推算, 若活動如期舉辦可獲利 10 萬元, 週日舉辦獲利僅剩 6 萬元, 活動完全取消公司將虧損 2 萬元。已知本週六、日兩天空氣品質 PM2.5 為「紫爆」的機率皆為 p , 則此行銷公司辦理週末路跑活動獲利的期望值為何? (單位: 萬元)
 (1) $-8p^2 - 4p + 10$ (2) $-8p^2 + 20p - 2$ (3) $4p^2 + 4p - 10$
 (4) $-18p - 16$ (5) $-6p + 10$

二、多選題 (佔 24 分)

5. 已知 $A(-1, -2, 0)$, $B(2, 2, 1)$, $C(-1, 4, 3)$, $D(5, 6, a)$ 為坐標空間中四點, 請選出正確的選項。
 (1) 若 A, B, C, D 四點共面, 則 $a=2$ (2) 若四面體 $ABCD$ 的體積為 6, 則 $a=4$
 (3) 若恰有一圓通過 A, B, D 三點, 則 $a=3$
 (4) 若 $\triangle ABD$ 的面積為 10, 則 $a=6$ (5) 若 $\overline{AB} \perp \overline{AD}$, 則 $a=-50$

6. 已知 $f(x)$ 為四次實係數多項式, 且 $y=f(x)$ 的圖形與其通過的五點如右圖所示, 請問下列敘述何者正確?

- (1) 方程式 $f(x) = x$ 有四個相異實根
- (2) 方程式 $f(x) = 1$ 的四根乘積大於 0
- (3) 不等式 $f(x-1) < 0$ 的解為 $1 < x < 7$
- (4) 不等式 $f(2x) \geq 0$ 的解為 $x \leq 1$ 或 $x \geq 4$
- (5) 設 $y = f(x)$ 在 $x = \alpha$ 時有相對極大值, 則 $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha^n = 0$



7. 已知函數 $y = f(x) = \sin x + a \cos x$ 的圖形對稱於直線 $x = \frac{5\pi}{3}$ ，其中 a 為實數，試選出正確的選項。
- (1) $a = \frac{\sqrt{3}}{3}$ (2) 函數 $y = f(x)$ 的圖形是週期為 2π ，振幅為 $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ 的波狀圖形
- (3) $f(x)$ 在 $x = \frac{5\pi}{3}$ 時有最大值 (4) $f(\frac{1}{2}) < 0$
- (5) 函數 $y = f(x)$ 的圖形可由 $y = \sin x$ 的圖形以 y 軸為基準線，水平方向伸縮 $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ 倍，並向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 單位得到

三、選填題（佔 28 分）

- A. 在所有滿足 $|z - 2 + i| = 1$ 的複數 z 中 ($i = \sqrt{-1}$)， $|z + 1 - 2i|$ 的最大值為_____。
- B. 某高中辦理班際棒球比賽，一年忠班為了賽前練習，將班上同學分為甲、乙兩隊進行一場友誼賽。比賽過程中出現一個情形：甲隊 3 號球員在一壘板沿西 $30^\circ 10'$ 北，以 15 公尺／秒的速度向距一壘 30 公尺處的二壘，乙隊投手在一壘板南 $60^\circ 10'$ 西 20 公尺處，他必須要以_____公尺／秒的球速將球投向二壘，才能與甲隊 3 號球員同時到達二壘。(不考慮乙隊投手的反應時間)(化為最簡根式)
- C. 坐標平面上，已知 $A(2,0)$ ， $B(0,4)$ 兩點，試求在第一象限中滿足 $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} \leq 0$ 之 P 點所形成的區域面積為_____。(化為最簡分數)
- D. 已知 $f(x) = 3x^2 - 2x \int_1^2 f(x) dx + 1$ 為一實係數多項式，則 $\int_0^1 f(x) dx =$ _____。

第貳部分：非選擇題（佔 24 分）

一、在坐標平面上的點序列 (a_1, b_1) ， (a_2, b_2) ， (a_3, b_3) ， \dots ，對所有的 n 為正整數滿足 $(a_{n+1}, b_{n+1}) = (\sqrt{3}a_n - b_n, \sqrt{3}b_n + a_n)$ 。設二階方陣 M 為在坐標平面上定義的線性變換，可將 (a_n, b_n) 映射至 (a_{n+1}, b_{n+1}) ，則：

- (1) 試問線性變換矩陣 M 為何？(2 分)
- (2) 試求矩陣 M 的反矩陣 M^{-1} 。(4 分)
- (3) 若 $(a_{100}, b_{100}) = (2^{107}, 2^{108})$ ，則 $a_1 + b_1$ 之值為何？(6 分)

二、已知 $f(x) = x^3 - 6x$ ，點 $P(-2, f(-2))$ 在 $y = f(x)$ 的圖形上且直線 L 通過 P 點和 $y = f(x)$ 圖形相切，試求：

- (1) 直線 L 的方程式。(5 分)
- (2) 直線 L 與 $y = f(x)$ 圖形所圍成的區域面積。(7 分)

RA684 臺北區高中 106 學年度第二學期指定科目第二次
模擬考數學甲 參考答案

第壹部分：選擇題

1.(5) 2.(3) 3.(4) 4.(1) 5.(1)(5) 6.(2)(4)(5) 7.(2)(4)

選填題

A. $3\sqrt{2}+1$ B. $5\sqrt{7}$ C. $4+\frac{5\pi}{2}$ D. 0

第貳部分：非選擇題

一、(1) $\begin{bmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{bmatrix}$ (2) $\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{\sqrt{3}}{4} \end{bmatrix}$ (3) 256

二、(1) $y=6x+16$ (2) 108