

# 107 學年度全國高級中學指定科目第二次模擬考數學甲

## 第壹部分：選擇題



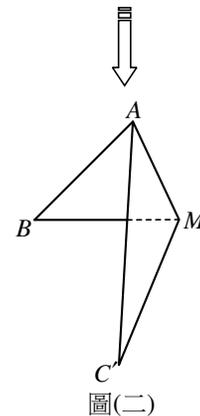
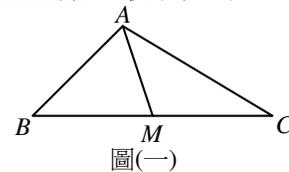
### 一、單選題：(18分)

- 設  $\vec{u} = (7, -4, -4)$ ,  $\vec{v} = (2, 1, -2)$ ,  $\vec{w} = \vec{u} - t\vec{v}$  且  $t$  為實數；當  $\vec{w}$  平分  $\vec{u}$  和  $\vec{v}$  的夾角時，則  $t$  為下列何值？(1) -3 (2) -2 (3) -1 (4) 1 (5) 3
- 設  $a, b$  皆為實數，欲使  $f(x) = \begin{cases} a|x-6|+b, & \text{若 } 3 \leq x < 7 \\ x, & \text{若 } x < 3 \text{ 或 } x \geq 7 \end{cases}$  為一連續函數，則  $a-b$  為下列何值？  
(1) -11 (2) -2 (3) 7 (4) 9 (5) 11
- 已知圓  $\Gamma: x^2 + y^2 - 6x - 8y = 0$ ，設  $k$  為實數，若直線  $L_1: 2x + y + k = 0$  與圓  $\Gamma$  交於相異兩點  $A, B$ ，直線  $L_2: x - 2y = 2k$  與圓  $\Gamma$  交於相異兩點  $C, D$ ；當兩直線  $L_1, L_2$  所截弦長相等時，即  $\overline{AB} = \overline{CD}$  時，則  $k$  為下列何值？(1) 10 (2) 5 (3) 0 (4) -5 (5) -10

### 二、多選題：(40分)

4. 設  $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ ,  $B = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$ ，則下列選項哪些是正確的？

- (1)  $A$  為一鏡射矩陣 (2)  $AB$  為一旋轉矩陣 (3)  $AB = BA$  (4) 設  $k > 0$ ，則  $(AB)^{2019} \begin{bmatrix} k \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ k \end{bmatrix}$   
 (5) 設  $\triangle ABC$  經  $(BA)^{2019}$  變換到  $\triangle A'B'C'$ ，則  $\triangle A'B'C'$  的面積會大於  $\triangle ABC$  的面積
5. 設  $i = \sqrt{-1}$  且  $a$  為實數，關於實係數多項式  $f(x) = x^3 + ax + 1$  與  $g(x) = x^4 + ax^2 - 1$  的敘述，則下列選項哪些是正確的？  
 (1) 當  $a = 0$  時，方程式  $f(x) = 0$  恰有一實根 (2) 當  $a > 0$  時，方程式  $f(x) = 0$  恰有一正實根  
 (3) 若方程式  $f(x) = 0$  恰有一實根  $\alpha$ ，則  $f(2\alpha) > 0$   
 (4) 方程式  $g(x) = 0$  必有實根 (5) 方程式  $f(x) = g(x)$  必有實根
6. 設  $i = \sqrt{-1}$  且  $n$  為正整數，已知  $z, z-i, iz$  皆為  $x^n = 1$  的複數根，將之標記在複數平面上可得其對應的點分別為  $A(z), B(z-i), C(iz)$ ，原點為  $O$ ，則下列選項哪些是正確的？  
 (1) 複數  $z$  的實部  $\text{Re}(z)$  是有理數  
 (2) 若複數  $z-i$  的主幅角為  $\text{Arg}(z-i)$ ，則  $180^\circ < \text{Arg}(z-i) < 360^\circ$   
 (3) 複數  $iz+1$  亦為  $x^n = 1$  的複數根  
 (4)  $A(z), B(z-i), C(iz)$  三點皆在不同的象限內 (5) 滿足條件的正整數  $n$  最小值為 12
7.  $\triangle ABC$  中， $\overline{AB} = 6$ ,  $\overline{AC} = 10$ ,  $\angle BAC = 120^\circ$ ，點  $M$  在  $\overline{BC} = \overline{MC}$ ，則下列選項哪些是正確的？  
 (1)  $\overline{BC} = 14$  (2)  $\triangle ABC$  的外接圓面積為  $\frac{28}{\sqrt{3}}\pi$   
 (3)  $\overline{AM} = \frac{15}{4}$   
 (4) 將圖(一)中的  $\triangle AMC$  以  $\overline{AM}$  為摺痕摺至與  $\triangle AMB$  重疊，得  $\triangle AMC'$ ，如圖(二)所示，則  $\angle BMC' < 60^\circ$   
 (5) 承(4)，得  $7 < \overline{BC'} < 8$



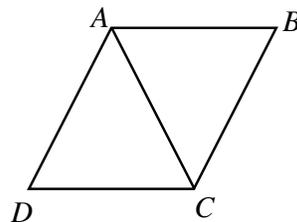
8. 箱子中有若干張卡片，其中一張寫著 1，一張寫著 2， $n$  張寫著 3， $n$  為正整數。從中依序抽兩張不同的卡片，點數依序為  $a, b$ ，取後不放回，令隨機變數  $X$  表示  $a+2b$ ，隨機變數  $Y$  表示  $2a+b$ 。請選出正確的選項。

- (1) 隨機變數  $X$  的可能值最小為 5    (2) 當  $n=2$  時， $X=7$  的事件機率為  $\frac{1}{6}$   
 (3) 當  $n=2$  時， $X=8$  的事件機率為  $\frac{1}{6}$     (4) 當  $n=1$  時， $X$  的期望值為 6  
 (5) 不論  $n$  是何值， $X$  的期望值等於  $Y$  的期望值

三、選填題：(18 分)

A. 坐標平面上一直線  $L: 4x - 3y + k = 0$  與對數函數  $y = \log_2 x$  圖形相交於  $A, B$  兩點，且  $\overline{AB} = \frac{5}{2}$ ，試求  $k = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

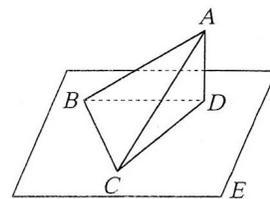
B. 如右圖(此為示意圖)，平行四邊形  $ABCD$  中  $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = 0$ ，  
 $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD} = 10|\overrightarrow{AC}|$ ，  
 則  $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。



C. 在空間中， $\overrightarrow{OA} = (4, 0, -3)$ ， $\overrightarrow{OB} = (2, -1, 3)$ ， $\overrightarrow{OC} = (3, 3, 3)$ ， $H$  為異於原點  $O$  的點。若  $\overrightarrow{OA}$ 、 $\overrightarrow{OB}$ 、 $\overrightarrow{OC}$  在  $\overrightarrow{OH}$  方向上的正射影分別為  $\overrightarrow{OH}$ 、 $\overrightarrow{OH}$ 、 $3\overrightarrow{OH}$ ，則  $|\overrightarrow{OH}| = \underline{\hspace{2cm}}$ 。  
 (化為最簡分數)

第貳部分：非選擇題(24 分)

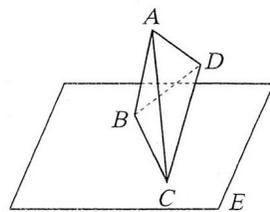
一、設計師小翰欲設計一個大型的公共藝術作品，先以 3D 列印設計一個四面體的模型，底面  $BCD$  平貼在桌面(平面  $E$ )上研究擺設位置，如圖(一)。已知四面體  $ABCD$  中， $\overline{AB} = \sqrt{34}$ ， $\overline{DC} = 5$ ， $\overline{BC} = 6$ ， $\overline{AD} = 3$ ， $\overline{AD} \perp \overline{BD}$  且  $\overline{AD} \perp \overline{CD}$ ，試回答下列問題：



圖(一)

(1) 圖(一)中，若平面  $ABC$  與底面  $BCD$  所形成的兩面角為  $\theta$ ，則求  $\cos \theta$  的值。(4 分)

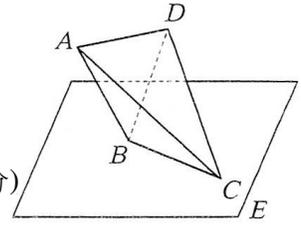
(2) 如圖(二)，以  $\overline{BC}$  為軸，將圖(一)中的四面體  $ABCD$  旋轉到使得平面  $ABC$  與桌面  $E$  垂直，則求此時  $D$  點到桌面  $E$  的距離。(2 分)



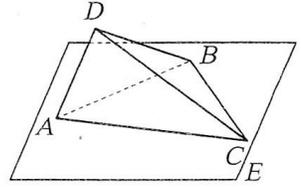
圖(二)

(3) 如圖(三)，以  $\overline{BC}$  為軸，將圖(一)中的四面體  $ABCD$  旋轉到使得邊  $\overline{AD}$  與桌面  $E$  平行，則求此時  $D$  點到桌面  $E$  的距離。(2分)

(4) 如圖(四)，以  $\overline{BC}$  為軸，將圖(一)中的四面體  $ABCD$  旋轉到使得平面  $ABC$  平貼於桌面  $E$  上，則求此時  $D$  點到桌面  $E$  的距離。(4分)

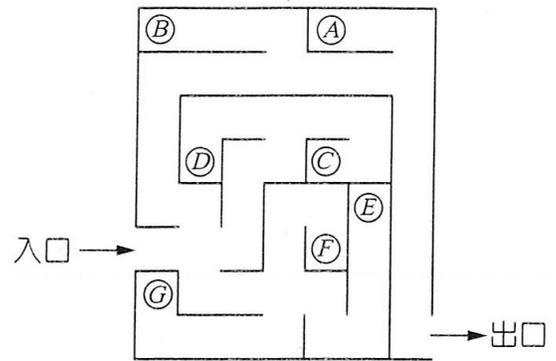


圖(三)



圖(四)

二、右圖為一個小迷宮，從入口進去後，最後可以安全由出口出來便是破解此迷宮，規定進去後走過的路徑不可重複，也就是必須向前走不能後退，且在每一條路的盡頭都綁了一隻惡犬(迷宮中有 7 隻惡犬，如右圖英文字母標示處)，遇到惡犬者便被淘汰。假設走到每一個路口時，接下來各前進方向被選擇的機會都相等，請依上述訊息回答下列個問題：



(1) 小翰走一次迷宮且欲到惡犬  $\textcircled{C}$  的機率。(2分)

(2) 小翰走一次迷宮且被淘汰的機率。(3分)

(3) 在小翰走一次迷宮且被淘汰的情況下，求遇到惡犬  $\textcircled{C}$  的機率。(3分)

(4) 設  $n$  為正整數，有  $n$  個人各走一次迷宮，且彼此之間的走法是獨立的，則這  $n$  個人當中至少有一人可破解此迷宮的機率不小於 0.8，求  $n$  的最小值。(4分)

(參考數值： $\log 2 \approx 0.3010$ ； $\log 3 \approx 0.4771$ ； $\log 7 \approx 0.8451$ ； $\log 11 \approx 1.0414$ )

RA685 107 學年度全國高級中學指定科目第二次模擬考數學甲

選擇題：1. (1) 2. (1) 3. (4) 4. (2)(4) 5. (1)(4)(5) 6. (2)(3)(5) 7. (1)(5) 8. (3)(4)(5)

選填題：A. -5 B. 200 C.  $\frac{5}{3}$

非選擇題：一、(1)  $\frac{4}{5}$  (2)  $\frac{16}{5}$  (3) 4 (4)  $\frac{12}{5}$

二、(1)  $\frac{1}{6}$  (2)  $\frac{11}{12}$  (3)  $\frac{2}{11}$  (4) 19