數學考科詳解

題號	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	
答案	(1)	(1)	(4)	(2)(4)	(1)(4)(5)	(2)(3)(5)	(1)(5)	(3)(4)(5)	

第壹部分：選擇題

一、單選題

1. (1)

出處：第四冊第一章〈空間向量〉

目標：評量向量平分夾角的概念

解析：$|\overrightarrow{u}|=\sqrt{7^2+(-4)^2+(-4)^2}=9$，$|\overrightarrow{v}|=\sqrt{2^2+1^2+(-2)^2}=3$

當 $|\overrightarrow{u}|=|t\overrightarrow{v}|$ 且 $t<0$ 時，$\overrightarrow{w}$ 即可平分 $\overrightarrow{u}$、$\overrightarrow{v}$ 的夾角

$\Rightarrow 9=3\times(-t)\Rightarrow t=-3$

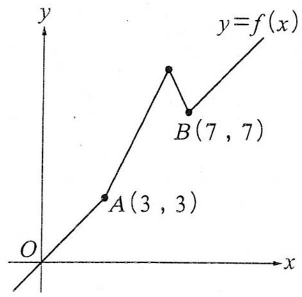
故選(1)。

2. (1)

出處：選修數學甲(下)第一章〈極限與函數〉

目標：評量連續函數的概念

解析：若 $f(x)=\begin{cases} a|x-6|+b，若 3\le x<7 \\ x，若 x<3 或 x\ge 7 \end{cases}$ 為一連續函數



則 $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)=f(3)\Rightarrow \lim\limits_{x\to 3^-}(a|x-6|+b)=3$

$\Rightarrow 3a+b=3$ ……①

$\lim\limits_{x\to 7^-} f(x)=f(7)\Rightarrow \lim\limits_{x\to 7^-}(a|x-6|+b)=7$

$\Rightarrow a+b=7$ ………②

由①、②可得 $a=-2$，$b=9$

$\Rightarrow a-b=-11$

故選(1)。

3. (4)

出處：第三冊第二章〈直線與圓〉

目標：評量直線與圓相交的關係

解析：$\Gamma: x^2+y^2-6x-8y=0$

$\Rightarrow (x-3)^2+(y-4)^2=25$，

則圓心 $M(3,4)$，半徑 $r=5$

$\because \overline{AB}=\overline{CD}\quad \therefore d(M,L_1)=d(M,L_2)<r$

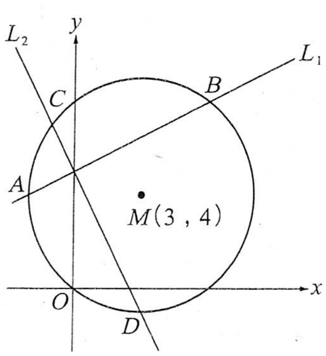
$$\frac{|2\times3+4+k|}{\sqrt{2^2+1^2}}=\frac{|3-2\times4-2k|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}<5$$

$\Rightarrow |10+k|=|-5-2k|$

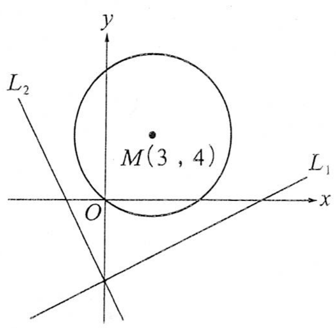
$\Rightarrow 10+k=-5-2k$ 或 $10+k=-(-5-2k)$

$\Rightarrow k=-5$ 或 $k=5$

代入檢查得 $k=-5$，則 $k=5$ 不合



$k=-5$



$k=5$

故選(4)。

二、多選題

4. (2)(4)

出處：第四冊第三章〈矩陣〉

目標：評量矩陣線性變換的性質

解析：(1) ╳：$\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{bmatrix}=\sqrt{2}\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}$

$=\begin{bmatrix}\sqrt{2} & 0\\ 0 & \sqrt{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}$為伸縮矩陣和鏡射矩陣的合成變換

(2) ○：$AB=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix}$

$=\begin{bmatrix}\cos 270^\circ & -\sin 270^\circ\\ \sin 270^\circ & \cos 270^\circ\end{bmatrix}$為旋轉矩陣

(3) ╳：$BA=\begin{bmatrix}-\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$ $\therefore AB\neq BA$

(4) ○：$(AB)^{2019}\begin{bmatrix}k\\ 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos 270^\circ & -\sin 270^\circ\\ \sin 270^\circ & \cos 270^\circ\end{bmatrix}^{2019}\begin{bmatrix}k\\ 0\end{bmatrix}$

$=\begin{bmatrix}\cos(90\times 6057)^\circ & -\sin(90\times 6057)^\circ\\ \sin(90\times 6057)^\circ & \cos(90\times 6057)^\circ\end{bmatrix}\begin{bmatrix}k\\ 0\end{bmatrix}$

$=\begin{bmatrix}\cos 90^\circ & -\sin 90^\circ\\ \sin 90^\circ & \cos 90^\circ\end{bmatrix}\begin{bmatrix}k\\ 0\end{bmatrix}$

$=\begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}k\\ 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ k\end{bmatrix}$

(5) ╳：$\triangle A'B'C'$的面積$=\triangle ABC$的面積$\times|\det((BA)^{2019})|$

$(BA)^{2019}=\begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{bmatrix}^{2019}=\begin{bmatrix}\cos 90^\circ & -\sin 90^\circ\\ \sin 90^\circ & \cos 90^\circ\end{bmatrix}^{2019}$

$=\begin{bmatrix}\cos(90\times 2019)^\circ & -\sin(90\times 2019)^\circ\\ \sin(90\times 2019)^\circ & \cos(90\times 2019)^\circ\end{bmatrix}$

$\det((BA)^{2019})=\begin{vmatrix}\cos(90\times 2019)^\circ & -\sin(90\times 2019)^\circ\\ \sin(90\times 2019)^\circ & \cos(90\times 2019)^\circ\end{vmatrix}=1$

故$\triangle A'B'C'$的面積$=\triangle ABC$的面積

故選(2)(4)。

5. (1)(4)(5)

出處：第一冊第二章〈多項式函數〉

目標：評量多項式方程式實根概念

解析：(1) ○：當 $a=0$ 時，方程式 $x^3+1=0\Rightarrow(x+1)(x^2-x+1)=0$，恰有一個實根 $x=-1$

(2) ╳：當 $a>0$ 時，若 x 為正實數，則函數值 $f(x)=x^3+ax+1$ 必大於 0，故方程式 $f(x)=0$ 沒有正實根

(3) ╳：方程式 $f(x)=0$ 恰有一實根 $\alpha\Rightarrow$ 函數 $y=f(x)$ 圖形與 x 軸恰交一點，又 $f(0)=1>0$

且 $f(x)$ 的領導係數$=1>0$，故 $\alpha<0\Rightarrow 2\alpha<\alpha$，則 $f(2\alpha)<f(\alpha)=0$

(4) ○：方程式 $g(x)=x^4+ax^2-1=0$，因為 $g(0)=-1<0$ 且 $g(x)$ 中的領導係數$=1>0$，

所以函數 $y=g(x)$ 與 x 軸必有交點，故方程式 $g(x)=0$ 必有實根

(5) ○：方程式 $f(x)=g(x)$，令函數 $h(x)=g(x)-f(x)=x^4-x^3+ax^2-ax-2$

因為 $h(0)=-2<0$ 且 $h(x)$ 的領導係數為 $1>0$，所以函數 $y=h(x)$ 圖形與 x 軸必有交點，故方程式

$h(x)=0$ 必有實根，即方程式 $f(x)=g(x)$ 必有實根

故選(1)(4)(5)。

6. (2)(3)(5)

出處：選修數學甲(上)第二章〈三角函數〉

目標：評量 1 的 n 次方根

解析：由 $|x^n|=1$ 可得 $|x|^n=1 \Rightarrow |x|=1$

$\therefore |z|=|z-i|=|iz|=1$

令 $z=a+bi$，a、$b\in R$

則 $z-i=a+(b-1)i$ 且 $iz=-b+ai$

$|z|=1 \Rightarrow \sqrt{a^2+b^2}=1$ ……………①

$|z-i|=1 \Rightarrow \sqrt{a^2+(b-1)^2}=1$ ……②

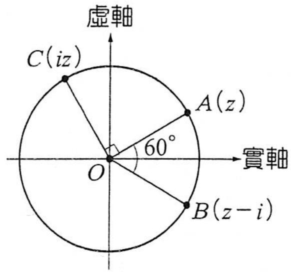
$|iz|=1 \Rightarrow \sqrt{(-b)^2+a^2}=1$

由①、②可得 $b=\dfrac{1}{2}$，$a=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

(1) ╳：複數 z 的實部 $\mathrm{Re}\,(z)=a=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ 不是有理數

(2) ○：如圖(一)，圖(二)複數 $z-i$ 的主輻角 $\mathrm{Arg}\,(z-i)$ 滿足 $180^\circ<\mathrm{Arg}\,(z-i)<360^\circ$

(3) ○：如圖(一)，若 $z=\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}i=\cos 30^\circ+i\sin 30^\circ$，



圖(一)

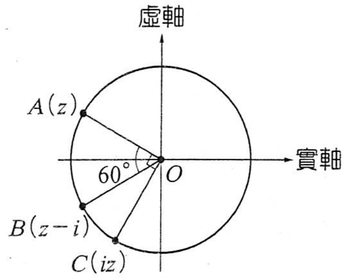
則 $z-i=\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{1}{2}i=\cos 330^\circ+i\sin 330^\circ$

$iz=i\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}i\right)=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i=\cos 120^\circ+i\sin 120^\circ$

滿足以上條件的 n 必為 $n=12k$，$k\in Z$　$(\because (30, 330, 120)=30)$

$(iz+1)^n=\left[i\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}i\right)+1\right]^n$

$=\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right)^n=(\cos 60^\circ+i\sin 60^\circ)^{12k}=1$



圖(二)

如圖(二)，若 $z=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}i=\cos 150^\circ+i\sin 150^\circ$，

則 $z-i=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{1}{2}i=\cos 210^\circ+i\sin 210^\circ$

$iz=i\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}i\right)=-\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i=\cos 240^\circ+i\sin 240^\circ$

滿足以上條件的 n 必為 $n=12k$，$k\in Z$　$(\because (150, 210, 240)=30)$

$(iz+1)^n=\left[i\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}i\right)+1\right]^n=\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right)^n=(\cos 300^\circ+i\sin 300^\circ)^{12k}=1$

(4) ╳：如右圖(二)，B、C 同在第三象限內

(5) ○：承(3)可知

故選(2)(3)(5)。

7. (1)(5)

出處：第三冊第一章〈三角〉

目標：評量正弦定理、餘弦定理、中線性質

解析：(1) ○：$\cos 120^\circ=\dfrac{6^2+10^2-\overline{BC}^2}{2\times 6\times 10} \Rightarrow \overline{BC}=14$

(2) ╳：$\dfrac{\overline{BC}}{\sin 120^\circ}=2R \Rightarrow R=\dfrac{14}{\sqrt{3}}$

$\triangle ABC$ 的外接圓面積為 $\left(\dfrac{14}{\sqrt{3}}\right)^2\pi=\dfrac{196}{3}\pi$

(3) ╳：如題圖(一)，$\overline{AM}$ 是中線，故 $\overline{AB}^2+\overline{AC}^2=2(\overline{AM}^2+\overline{BM}^2)\Rightarrow 6^2+10^2=2(\overline{AM}^2+7^2)\Rightarrow \overline{AM}=\sqrt{19}$

(4) ╳：$\cos\angle BMC'=\cos(\angle AMC'-\angle AMB)=\cos(\angle AMC-\angle AMB)$

$=\cos(180^\circ-\angle AMB-\angle AMB)=-\cos(2\angle AMB)=1-2\cos^2\angle AMB$

$=1-2\left(\dfrac{7^2+(\sqrt{19})^2-6^2}{2\times 7\times\sqrt{19}}\right)^2=\dfrac{419}{931}<\dfrac{1}{2}=\cos 60^\circ\Rightarrow \angle BMC'>60^\circ$

(5) ○：$\because \overline{MB}=\overline{MC'}=7$ 且 $\angle BMC'>60^\circ$ $\therefore \overline{BC'}>7$

又 $\overline{BC'}^2=7^2+7^2-2\times7\times7\times\cos\angle BMC'=98-2\times49\times\dfrac{419}{931}=\dfrac{1024}{19}$

$\Rightarrow \overline{BC'}=\dfrac{32}{\sqrt{19}}<\dfrac{32}{\sqrt{16}}=8$

故 $7<\overline{BC'}<8$

故選(1)(5)。

8. (3)(4)(5)

出處：選修數學甲(上)第一章〈機率統計〉

目標：評量隨機變數與期望值的概念

解析：(1) ╳：當 $n=1$ 時，X 的可能取值為 $1+2\times2$，$1+2\times3$，$2+2\times1$，$2+2\times3$，$3+2\times1$，$3+2\times2$，

即 4，5，7，8 四種；

當 $n>1$ 時，X 的可能取值為 $1+2\times2$，$1+2\times3$，$2+2\times1$，$2+2\times3$，$3+2\times1$，$3+2\times2$，$3+2\times3$，

即 4，5，7，8，9 五種；故 X 的可能值最小為 4

(2) ╳：當 $n=2$ 時，事件 $(X=7)$ 包含 $(a,b)=(1,3)$ 或 $(3,2)$，共有 $1\times2+2\times1=4$ 個可能結果，

則 $P(X=7)=\dfrac{4}{4\times3}=\dfrac{1}{3}$

(3) ○：當 $n=2$ 時，事件 $(X=8)$ 包含 $(a,b)=(2,3)$，共有 $1\times2=2$ 個可能結果，

則 $P(X=8)=\dfrac{2}{4\times3}=\dfrac{1}{6}$

(4) ○：當 $n=1$ 時，$X=4$，5，7，8，對應的機率 $P=\dfrac{1}{6}$，$\dfrac{2}{6}$，$\dfrac{2}{6}$，$\dfrac{1}{6}$，

X 的期望值 $E(X)=4\times\dfrac{1}{6}+5\times\dfrac{2}{6}+7\times\dfrac{2}{6}+8\times\dfrac{1}{6}=6$

(5) ○：因為事件 $(a=i,b=j)$ 與事件 $(a=j,b=i)$ 發生的機率相同，此時 X 與 Y 的

值都是 $i+2j=2j+i$，如 $(a=2,b=3)$ 與 $(a=3,b=2)$ 發生的機率都是

$\dfrac{2}{4\times3}=\dfrac{1}{6}$，故期望值 $E(a+2b)=E(2a+b)$，即 $E(X)=E(Y)$

故選(3)(4)(5)。

三、選填題

A. -5

出處：第一冊第三章〈指數、對數函數〉、第三冊第三章〈平面向量〉

目標：評量對數圖形與對數基本運算

解析：取 L：$4x-3y+k=0$ 的方向向量為 $\overrightarrow{d}=(3,4)$，$|\overrightarrow{d}|=5$，$\overline{AB}=\dfrac{5}{2}=\dfrac{1}{2}|\overrightarrow{d}|$

即 $\overrightarrow{AB}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{d}=\left(\dfrac{3}{2},2\right)$，再設 $A(a,b)$，$B\left(a+\dfrac{3}{2},b+2\right)$

代入 $y=\log_2 x$ 得 $\begin{cases} b=\log_2 a \\ b+2=\log_2\left(a+\dfrac{3}{2}\right)\end{cases}\Rightarrow 2=\log_2\left(a+\dfrac{3}{2}\right)-\log_2 a$

$\Rightarrow 2=\log_2\dfrac{a+\frac{3}{2}}{a}\Rightarrow \dfrac{a+\frac{3}{2}}{a}=2^2$，得 $a=\dfrac{1}{2}$，$b=-1$

代入 L 得 $4\times\dfrac{1}{2}-3\times(-1)+k=0\Rightarrow k=-5$。

B. 200

出處：第三冊第三章〈平面向量〉

目標：評量向量的加法運算與內積定義

解析：〔解法一〕

平行四邊形 $ABCD$ 中 $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}=0$，$\overline{AC}\perp\overline{BD}$，平行四邊形 $ABCD$ 也是菱形

$\overline{AB}=\overline{AD}$ 且 $\angle CAB=\angle CAD$

故 $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}=10|\overrightarrow{AC}|$

可得 $\overrightarrow{AC}\cdot(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD})=20|\overrightarrow{AC}|$

$\Rightarrow\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AC}=|\overrightarrow{AC}|^2$

$\Rightarrow 20|\overrightarrow{AC}|=|\overrightarrow{AC}|^2$

$\Rightarrow|\overrightarrow{AC}|=20$

則 $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}=10|\overrightarrow{AC}|=200$。

〔解法二〕

平行四邊形 $ABCD$ 中 $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}=0$，$\overline{AC}\perp\overline{BD}$，平行四邊形 $ABCD$ 也是菱形

$\overline{AB}=\overline{AD}$ 且 $\angle CAB=\angle CAD=\theta$，

$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}=10|\overrightarrow{AC}|$

$\Rightarrow\overline{AC}\times\overline{AD}\times\cos\theta=10\times\overline{AC}$

$\Rightarrow\overline{AD}\times\cos\theta=10\Rightarrow\frac{1}{2}\overline{AC}=10$

$\Rightarrow\overline{AC}=20$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}&=\overline{AC}\times\overline{AB}\times\cos\theta\\&=\overline{AC}\times\overline{AD}\times\cos\theta\\&=200\text{。}\end{aligned}$$

C. $\frac{5}{3}$

出處：第四冊第二章〈空間中的平面與直線〉

目標：評量正射影概念與平面關係

解析：$\overrightarrow{OA}=(4,0,-3)$ 在 $\overrightarrow{OH}$ 方向上的正射影為 $\overrightarrow{OH}$

$\overrightarrow{OB}=(2,-1,3)$ 在 $\overrightarrow{OH}$ 方向上的正射影為 $\overrightarrow{OH}$

$\overrightarrow{OC}=(3,3,3)$ 在 $\overrightarrow{OH}$ 方向上的正射影為 $3\overrightarrow{OH}$

$\Rightarrow\overrightarrow{OC'}=\frac{1}{3}\overrightarrow{OC}=(1,1,1)$ 在 $\overrightarrow{OH}$ 方向上的正射影為 $\overrightarrow{OH}$

令 $O(0,0,0)$，且 $\overrightarrow{OA}$、$\overrightarrow{OB}$、$\overrightarrow{OC'}$ 在 $\overrightarrow{OH}$ 方向上的正射影皆相同

故 $A(4,0,-3)$、$B(2,-1,3)$、$C'(1,1,1)$ 共平面，令此平面為 E

則 $\overrightarrow{OA}$ 在 $\overrightarrow{OH}$ 方向上的正射影長為 O 點到平面 E 的距離 $d(O,E)$

取 $\overrightarrow{N_E}=\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC'}=(-2,-1,6)\times(-3,1,4)=(-10,-10,-5)$

E：$-10x-10y-5z=-40+15\Rightarrow 2x+2y+z-5=0$

故正射影長為 $|\overrightarrow{OH}|=d(O,E)=\frac{|2\times0+2\times0+0-5|}{\sqrt{2^2+2^2+1^2}}=\frac{5}{3}$。

第貳部分：非選擇題

一、(1) $\frac{4}{5}$；(2) $\frac{16}{5}$；(3) 4；(4) $\frac{12}{5}$

出處：第四冊第二章〈空間中的平面與直線〉

目標：評量兩面角與距離概念

解析：(1)如圖(一)

$\because \overline{AD} \perp \overline{CD}$

$\therefore \overline{AC} = \sqrt{\overline{AD}^2 + \overline{CD}^2} = \sqrt{3^2+5^2} = \sqrt{34} = \overline{AB}$

$\because \overline{AD} \perp \overline{BD}$

$\therefore \overline{BD} = \sqrt{\overline{AB}^2 - \overline{AD}^2} = \sqrt{(\sqrt{34})^2 - 3^2} = 5 = \overline{CD}$

則$\triangle ABC$與$\triangle BCD$皆為等腰三角形

作$\overline{AH} \perp \overline{BC}$於$H$，$\overline{DH} \perp \overline{BC}$於$H$

則$\angle AHD = \theta$為平面ABC與底面BCD所形成的兩面角

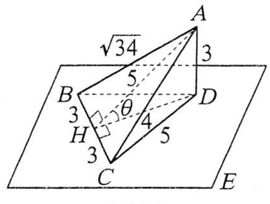
$\because \overline{AB} = \sqrt{34}$，$\overline{BH} = 3$，$\angle AHB = 90^\circ$

$\therefore \overline{AH} = 5$

$\because \overline{DC} = 5$，$\overline{CH} = 3$，$\angle CHD = 90^\circ$

$\therefore \overline{DH} = 4$

又$\overline{AD} = 3$，即$\triangle AHD$為直角三角形 $\Rightarrow \cos\theta = \dfrac{4}{5}$。



圖(一)

(2)如圖(二)

以$\overline{BC}$為軸，將圖(一)中的四面體$ABCD$旋轉到使得

平面ABC與桌面E垂直，則$\overline{AH} \perp$平面E於H

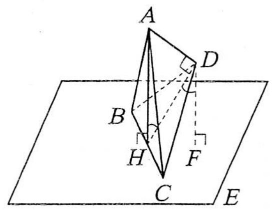
點H為$\overline{BC}$的中點；作$\overline{DF} \perp$平面E於F

$\because \overline{AH} \,/\!/\, \overline{DF}$

$\therefore \angle AHD = \angle HDF = \theta$

則$d(D, \text{平面} E) = \overline{DH} \times \cos\theta = 4 \times \dfrac{4}{5}$

$= \dfrac{16}{5}$。



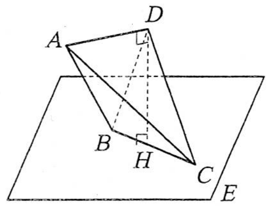
圖(二)

(3)如圖(三)，以$\overline{BC}$為軸，將圖(一)中的四面體$ABCD$旋轉到使得邊$\overline{AD}$與桌面E平行，則$\overline{DH} \perp \overline{AD}$於$D$且$\overline{DH} \perp$平面$E$於$H$

$d(\overline{AD}, \text{平面} E) = d(D, \text{平面} E)$

$= \overline{DH}$

$= 4$。



圖(三)

(4)如圖(四)，以$\overline{BC}$為軸

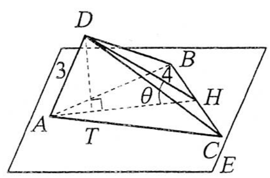
將圖(一)中的四面體$ABCD$旋轉到使得平面ABC平貼於桌面E上，

作$\overline{DT} \perp \overline{AH}$於$T$點且$\overline{AH}$在平面$E$上，則

$d(D, \text{平面} E) = \overline{DT} = \overline{DH} \times \sin\theta$

$= 4 \times \dfrac{3}{5}$

$= \dfrac{12}{5}$。



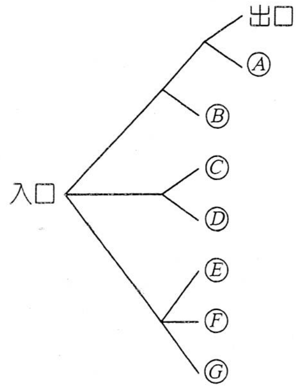
圖(四)

二、(1)$\dfrac{1}{6}$；(2)$\dfrac{11}{12}$；(3)$\dfrac{2}{11}$；(4) 19

出處：第二冊第三章〈機率〉、選修數學甲(上)第一章〈機率統計〉

目標：評量條件機率與獨立事件的重複試驗

解析：先將迷宮路徑分類成右側樹狀圖



(1)遇到惡犬C的機率為$\dfrac{1}{3} \times \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{6}$。

(2)〔解法一〕

破解的機率為$\dfrac{1}{3} \times \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{12}$

則淘汰的機率為$1 - \dfrac{1}{12} = \dfrac{11}{12}$。

〔解法二〕

如樹狀圖所示

被淘汰的機率為$\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{11}{12}$。

(3) $P(C\mid 淘汰)=\dfrac{\frac{1}{6}}{\frac{11}{12}}=\dfrac{2}{11}$。

(4)至少有一人破解的機率為 $1-\left(1-\frac{1}{12}\right)^n\geq 0.8\Rightarrow\left(\frac{11}{12}\right)^n\leq 0.2$

$\Rightarrow n(\log 11-\log 12)\leq\log 0.2\Rightarrow n(1.0414-2\times0.3010-0.4771)\leq -1+0.3010$

$\Rightarrow n\geq\dfrac{-0.6990}{-0.0377}\approx 18.5\Rightarrow n$ 的最小值為 19。

非選擇題批改原則

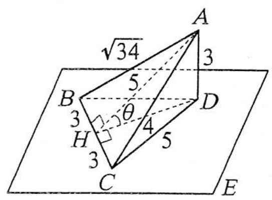
第貳部分：非選擇題

一、(1) $\frac{4}{5}$；(2) $\frac{16}{5}$；(3) 4；(4) $\frac{12}{5}$

出處：第四冊第二章〈空間中的平面與直線〉

目標：評量兩面角與距離概念

解析：(1)如圖㈠



圖㈠

$\because \overline{AD}\perp\overline{CD}$

$\therefore \overline{AC}=\sqrt{\overline{AD}^2+\overline{CD}^2}=\sqrt{3^2+5^2}=\sqrt{34}=\overline{AB}$

$\because \overline{AD}\perp\overline{BD}$

$\therefore \overline{BD}=\sqrt{\overline{AB}^2-\overline{AD}^2}=\sqrt{(\sqrt{34})^2-3^2}=5=\overline{CD}$

則$\triangle ABC$與$\triangle BCD$皆為等腰三角形　(1 分)

作$\overline{AH}\perp\overline{BC}$於$H$，$\overline{DH}\perp\overline{BC}$於$H$

則$\angle AHD=\theta$為平面ABC與底面BCD所形成的兩面角

$\because \overline{AB}=\sqrt{34}$，$\overline{BH}=3$，$\angle AHB=90^\circ$

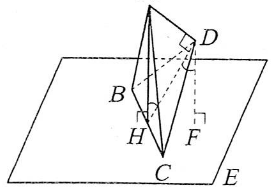
$\therefore \overline{AH}=5$　(1 分)

$\because \overline{DC}=5$，$\overline{CH}=3$，$\angle CHD=90^\circ$

$\therefore \overline{DH}=4$　(1 分)

又$\overline{AD}=3$，即$\triangle AHD$為直角三角形$\Rightarrow\cos\theta=\frac{4}{5}$。　(1 分)

(2)如圖㈡



圖㈡

以$\overline{BC}$為軸，將圖㈠中的四面體$ABCD$旋轉到使得平面ABC與桌面E垂直，則$\overline{AH}\perp$平面E於H

點H為$\overline{BC}$的中點；作$\overline{DF}\perp$平面E於F

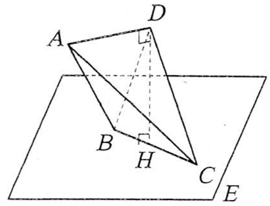
$\because \overline{AH}\,/\!/\,\overline{DF}$

$\therefore \angle AHD=\angle HDF=\theta$　(1 分)

則$d(D,平面E)=\overline{DH}\times\cos\theta=4\times\frac{4}{5}$

$=\frac{16}{5}$。　(1 分)

(3)如圖㈢，以$\overline{BC}$為軸，將圖㈠中的四面體$ABCD$旋轉到使得邊$\overline{AD}$與桌面E平行，則$\overline{DH}\perp\overline{AD}$於$D$且$\overline{DH}\perp$平面$E$於$H$　(1 分)



圖㈢

$d(\overline{AD},平面E)=d(D,平面E)$

$=\overline{DH}$

$=4$。　(1 分)

⑷如圖㈣，以 $\overline{BC}$ 為軸

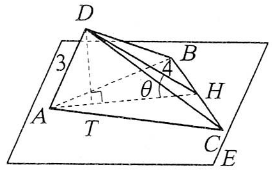
將圖㈠中的四面體 $ABCD$ 旋轉到使得平面 ABC 平貼於桌面 E 上，

作 $\overline{DT} \perp \overline{AH}$ 於 T 點且 $\overline{AH}$ 在平面 E 上　(2 分)

則 $d(D,\text{平面 }E)=\overline{DT}=\overline{DH}\times\sin\theta$

$=4\times\dfrac{3}{5}$

$=\dfrac{12}{5}$。　(2 分)



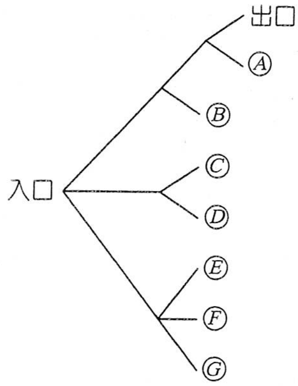
圖㈣

二、⑴ $\dfrac{1}{6}$；⑵ $\dfrac{11}{12}$；⑶ $\dfrac{2}{11}$；⑷ 19

出處：第二冊第三章〈機率〉、選修數學甲(上)第一章〈機率統計〉

目標：評量條件機率與獨立事件的重複試驗

解析：先將迷宮路徑分類成右側樹狀圖



⑴遇到惡犬 C 的機率為 $\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{6}$。　(2 分)

⑵〔解法一〕

破解的機率為 $\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{12}$　(1 分)

則淘汰的機率為 $1-\dfrac{1}{12}=\dfrac{11}{12}$。　(2 分)

〔解法二〕

如樹狀圖所示

被淘汰的機率為 $\dfrac{2}{3}+\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{11}{12}$。

⑶ $P(C\mid\text{淘汰})=\dfrac{\frac{1}{6}}{\frac{11}{12}}=\dfrac{2}{11}$。　(3 分)

⑷至少有一人破解的機率為 $1-\left(1-\dfrac{1}{12}\right)^n\geq 0.8\Rightarrow\left(\dfrac{11}{12}\right)^n\leq 0.2$　(2 分)

$\Rightarrow n(\log 11-\log 12)\leq\log 0.2\Rightarrow n(1.0414-2\times0.3010-0.4771)\leq -1+0.3010$

$\Rightarrow n\geq\dfrac{-0.6990}{-0.0377}\approx 18.5\Rightarrow n$ 的最小值為 19。　(2 分)