

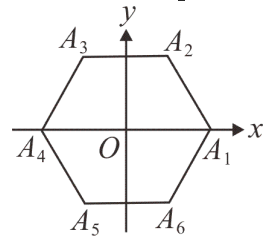
# 107 學年度全國高級中學指定科目第三次模擬考數學甲

## 第壹部分：選擇題



### 一、單選題：(18分)

1. 如右圖， $A_1 A_2 A_3 A_4 A_5 A_6$  為一正六邊形，其中原點  $O$  為中心點，且點  $A_1$  位於  $x$  軸正向上。



今從  $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$  中任取相異兩點  $A_i$  與  $A_j$ ，設點  $P$  滿足  $\vec{OP} = \vec{OA_i} - \vec{OA_j}$ ，

則點  $P$  位於第四象限的機率為下列何者？

- (1)  $\frac{2}{15}$  (2)  $\frac{1}{6}$  (3)  $\frac{1}{5}$  (4)  $\frac{4}{15}$  (5)  $\frac{8}{15}$ 。

2. 設三次實係數多項式  $f(x) = x^3 + ax^2 + bx - 12$ ，若  $\alpha$  與  $2\alpha - 1 - 3\sqrt{3}i$  為方程式  $f(x) = 0$  的其中兩虛根，則  $\alpha^2$  之值為下列何者？

- (1)  $16 - 16\sqrt{3}i$  (2)  $-1 + 2\sqrt{3}i$  (3)  $-16 - 16\sqrt{3}i$  (4)  $4 + 2\sqrt{3}i$  (5)  $\frac{1}{64} + \frac{\sqrt{3}}{64}i$ 。

3. 已知  $O(0,0)$ 、 $A(1,3)$ 、 $B(1,4)$  為坐標平面上三點，設  $k$  為非零實數，且二階方陣

$$M = \begin{bmatrix} k & -1 \\ 30 & -8 \end{bmatrix}$$

為在坐標平面上定義的線性變換，可將點  $O$  映射到點  $O'$ ，點  $A$  映射到點  $A'$ ，

點  $B$  映射到點  $B'$ ，若  $\vec{O'A'}$  與  $\vec{O'B'}$  垂直，則  $|\vec{O'A'} + 3\vec{O'B'}|$  之值為下列何者？

- (1) 5 (2)  $\sqrt{163}$  (3) 13 (4) 15 (5)  $\sqrt{241}$ 。

### 二、多選題：(40分)

4. 試問滿足不等式  $|x| + |x-3| \leq 3$  的實數  $x$  可為下列哪些值？（註： $\log 2 \approx 0.3010$ ， $\log 3 \approx 0.4771$ ）

- (1)  $\cos 2$  (2)  $\tan^2 61^\circ$  (3)  $2\sqrt{2}$  (4)  $\log_2 3$  (5)  $3^{-\pi}$ 。

5. 設投擲一個公正的骰子兩次依序出現的點數分別為  $a$  與  $b$ ，試問下列哪些選項是正確的？

- (1) 無窮數列  $\langle (a+b)^n \rangle$  為收斂的機率是 0 (2) 無窮數列  $\langle (a-b)^n \rangle$  為收斂的機率是  $\frac{4}{9}$

- (3) 無窮數列  $\left\langle \left(\frac{b}{a}\right)^n \right\rangle$  為收斂的機率是  $\frac{7}{12}$

- (4) 在無窮數列  $\left\langle \left(\frac{b}{a}\right)^n \right\rangle$  為收斂的條件下，無窮級數  $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{b}{a}\right)^n$  為收斂的機率是  $\frac{5}{7}$

- (5) 在無窮級數  $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{b}{a}\right)^n$  為收斂的條件下，無窮數列  $\left\langle \left(\frac{b}{a}\right)^n \right\rangle$  為收斂的機率是  $\frac{5}{7}$ 。

6. 在坐標空間中， $A$ 、 $B$  為直線  $L$  上相異兩點，若  $A$ 、 $B$  兩點到平面  $E: 4x - 7y + 4z = 1$  的距離均為  $\frac{5}{9}$ ，則下列哪些選項中的直線可能為直線  $L$ ？

- (1)  $\begin{cases} x=0 \\ y=1 \end{cases}$  (2)  $\begin{cases} y=1 \\ x+z=2 \end{cases}$  (3)  $\begin{cases} x=1 \\ y=4t \\ z=-2+7t \end{cases}, t \in R$

$$(4) \frac{x-4}{4} = \frac{y-5}{4} = \frac{z-5}{3} \quad (5) \frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{-4} = \frac{z}{-8}。$$

7. 已知  $0 \leq \alpha < 2\pi$ ， $0 \leq \beta < 2\pi$ ，若矩陣  $A = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ \cos \beta & \sin \beta \end{bmatrix}$ ， $B = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 5 & 10 \end{bmatrix}$ ，則  $AB$  可能為

下列哪些矩陣？

$$(1) \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 8 \end{bmatrix} \quad (2) \begin{bmatrix} 4 & 8 \\ -6 & -12 \end{bmatrix} \quad (3) \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ -5 & 3 \end{bmatrix} \quad (4) \begin{bmatrix} \sqrt{31} & 2\sqrt{31} \\ -\sqrt{29} & -2\sqrt{29} \end{bmatrix} \quad (5) \begin{bmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{8} \\ \sqrt{2} & \sqrt{8} \end{bmatrix}。$$

8. 設三次實係數多項式  $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ ，若  $f(x)$  沒有極值，且  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{x-2} = 12$ ，

則下列哪些選項是正確的？

(1)  $a$  之值可能為 0    (2)  $a$  之值可能為 2    (3)  $b$  之值可能為 -2

(4)  $b$  之值可能為 2    (5)  $c$  之值可能為 0。

### 三、選填題：(18分)

A. 已知圓  $C_1$  與圓  $C_2$  相交於  $A(a, 4)$ ， $B(6, -2)$  兩點，且兩圓的圓心皆位於直線

$L: y = \frac{2}{3}x + k$  上，則數對  $(k, a) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。(化為最簡分數)

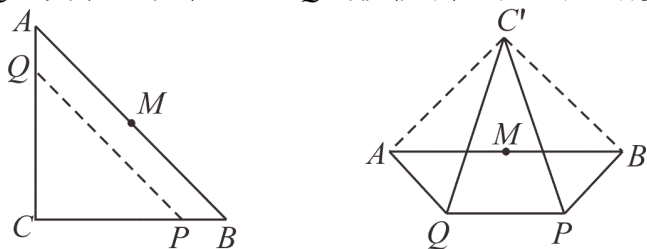
B. 在  $\triangle ABC$  中，已知  $\cos A = \frac{1}{8}$ ， $\cos B = \frac{9}{16}$ ， $O$  為  $\triangle ABC$  的內切圓圓心，若直線  $BO$  交  $\overline{AC}$  於  $D$  點

，且  $\overline{CD} = 15$ ，則  $\overline{AD} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

C. 試求指數方程式  $5^{3x+2} - 8^{x+1} = (\sqrt{2})^{6x+2}$  的實數解為  $x = \underline{\hspace{2cm}}$ 。(化為最簡分數)

第貳部分：非選擇題(24 分)

一、在  $\triangle ABC$  中， $\overline{AB} = 8$ ， $\overline{AC} = \overline{BC}$ ， $\angle C = 90^\circ$ ， $\overline{AB}$  的中點為  $M$ ，且  $P$ 、 $Q$  分別為  $\overline{BC}$ 、 $\overline{AC}$  上一點，並滿足  $\overline{BP} = \frac{1}{4}\overline{BC}$ ， $\overline{AQ} = \frac{1}{4}\overline{AC}$ 。今將  $\triangle CPQ$  沿  $\overline{PQ}$  向上折起，已知折起後得四角錐  $C' - ABPQ$ ，其中  $C'$  在平面  $ABPQ$  的投影點恰為  $M$  點。請參見示意圖



- (1) 試求  $\overline{QM}$  的長度
- (2) 試求  $\overline{C'M}$  的長度
- (3) 若平面  $AQC'$  與平面  $ABPQ$  的銳夾角為  $\theta$ ，則  $\cos \theta = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

二、剛滿 18 歲的阿樹為了在上大學前取得汽車駕照，於是利用暑假期間參加邱名汽車駕訓班，假設阿樹每次練習倒車入庫時，因為車輪壓管線而被扣分的機率為  $p$ ，其中每次練習結果為互相獨立。若阿樹連續練習四次倒車入庫中恰一次因為車輪壓管線而被扣分的機率為  $f(p)$ ，試回答下列問題：

- (1) 試將  $f(p)$  表為  $p$  的多項式
- (2) 在  $0 < p < 1$  的條件下，試求  $f(p)$  的最大值
- (3) 試求  $\int_0^1 f(p) dp$  之值

RA687 107 學年度全國高級中學指定科目第三次模擬考數學甲

選擇題：1. (2) 2. (1) 3. (3) 4. (3)(4)(5) 5. (1)(3)(4) 6. (1)(3) 7. (1)(4)(5) 8. (1)(4)

選填題：A.  $(-\frac{5}{3}, 2)$  B. 10 C.  $-\frac{1}{3}$

非選擇題：一、(1)  $\sqrt{10}$  (2)  $2\sqrt{2}$  (3)  $\frac{\sqrt{2}}{2}$

二、(1)  $-4p^4 + 12p^3 - 12p^2 + 4p$  (2)  $\frac{27}{64}$  (3)  $\frac{1}{5}$