數學考科詳解

題號	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	
答案	(2)	(1)	(3)	(3)(4)(5)	(1)(3)(4)	(1)(3)	(1)(4)(5)	(1)(4)	

第壹部分：選擇題

一、單選題

1. (2)

出處：第二冊第三章〈機率〉、第三冊第三章〈平面向量〉

目標：評量考生能否結合平面向量的加減法與機率概念解題

解析：可知當 $\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA_1}-\overrightarrow{OA_3}=\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OA_6}$，$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA_1}-\overrightarrow{OA_2}=\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OA_5}=\overrightarrow{OA_6}$，

$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA_5}-\overrightarrow{OA_4}=\overrightarrow{OA_5}+\overrightarrow{OA_1}=\overrightarrow{OA_6}$，$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA_6}-\overrightarrow{OA_3}=\overrightarrow{OA_6}+\overrightarrow{OA_6}=2\overrightarrow{OA_6}$，

$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA_6}-\overrightarrow{OA_4}=\overrightarrow{OA_6}+\overrightarrow{OA_1}$ 時，

皆可使得點 P 位於第四象限，所以其機率為 $\dfrac{5}{6\times 5}=\dfrac{1}{6}$

故選(2)。

2. (1)

出處：第一冊第二章〈多項式函數〉、選修數學甲(上)第二章〈三角函數〉

目標：評量考生是否能利用虛根成對定理及棣美弗定理來解題

解析：設 $\alpha=m+ni$，其中 $m\in R$，$n\in R$

由虛根成對定理可知 $2\alpha-1-3\sqrt{3}i=\overline{\alpha}$

$$\Rightarrow (2m-1)+(2n-3\sqrt{3})i=m-ni\Rightarrow\begin{cases}2m-1=m\\2n-3\sqrt{3}=-n\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}m=1\\n=\sqrt{3}\end{cases}$$

所以 $1+\sqrt{3}i$，$1-\sqrt{3}i$ 為方程式 $f(x)=0$ 的其中兩虛根

即 x^2-2x+4 為 $f(x)$ 的因式，利用長除法

$$
\begin{array}{r|l}
 & x-3 \\ \hline
x^2-2x+4 & x^3+ax^2+bx-12 \\
 & x^3-2x^2+4x \\ \cline{2-2}
 & (a+2)x^2+(b-4)x-12 \\
 & -3x^2+6x-12 \\ \cline{2-2}
 & 0
\end{array}
$$

可得 $\begin{cases}a+2=-3\\b-4=6\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=-5\\b=10\end{cases}$

$$\Rightarrow \alpha^{\frac{b}{2}}=(1+\sqrt{3}i)^5=\left(2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)\right)^5=32\left(\cos\frac{5\pi}{3}+i\sin\frac{5\pi}{3}\right)$$

$$=32\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)=16-16\sqrt{3}i$$

故選(1)。

3. (3)

出處：第三冊第三章〈平面向量〉、第四冊第三章〈矩陣〉

目標：評量考生能否操作平面上的線性變換，並利用平面向量的內積來解題

解析：可得 $\begin{bmatrix}k&-1\\30&-8\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}\Rightarrow O'(0,0)$

$\begin{bmatrix}k&-1\\30&-8\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}k-3\\6\end{bmatrix}\Rightarrow A'(k-3,6)$

$\begin{bmatrix}k&-1\\30&-8\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}k-4\\-2\end{bmatrix}\Rightarrow B'(k-4,-2)$

所以 $\overrightarrow{O'A'}=(k-3,6)$，$\overrightarrow{O'B'}=(k-4,-2)$，因為 $\overrightarrow{O'A'}\perp\overrightarrow{O'B'}$

因此 $\overrightarrow{O'A'}\cdot\overrightarrow{O'B'}=(k-3)(k-4)-12=0\Rightarrow k^2-7k=0\Rightarrow k(k-7)=0\Rightarrow k=7$ 或 0 (不合)

於是可得 $\overrightarrow{O'A'}=(4,6)$，$\overrightarrow{O'B'}=(3,-2)$

則 $\overrightarrow{O'A'}+3\overrightarrow{O'B'}=(4,6)+(9,-6)=(13,0)$

$\Rightarrow |\overrightarrow{O'A'}+3\overrightarrow{O'B'}|=13$

故選(3)。

二、多選題

4. (3)(4)(5)

出處：第一冊第一章〈數與式〉、第一冊第三章〈指數、對數函數〉、第三冊第一章〈三角〉

目標：評量考生是否能解含絕對值的一次不等式

解析：由三角不等式可知 $|x|+|x-3|=|x|+|3-x|\geq|x+(3-x)|=3$

又 $|x|+|x-3|\leq 3$，所以 $|x|+|x-3|=3$，即三角不等式的等號成立

$\Rightarrow x(3-x)\geq 0\Rightarrow x(x-3)\leq 0\Rightarrow 0\leq x\leq 3$

〈另解〉

(i) $x\geq 3$ 時，$|x|+|x-3|=x+(x-3)=2x-3\leq 3\Rightarrow x\leq 3\Rightarrow x=3$

(ii) $0<x<3$ 時，$|x|+|x-3|=x+(3-x)=3\leq 3\Rightarrow 0<x<3$

(iii) $x\leq 0$ 時，$|x|+|x-3|=-x+(3-x)=-2x+3\leq 3\Rightarrow x\geq 0\Rightarrow x=0$

由(i)、(ii)、(iii)可得 $0\leq x\leq 3$

(1) ╳：$\cos 2<0$

(2) ╳：$\tan^2 61^\circ>\tan^2 60^\circ=(\sqrt{3})^2=3$

(3) ○：$0<2^{\sqrt{2}}<2^{\frac{3}{2}}=\sqrt{8}<3$

(4) ○：$1=\log_2 2<\log_2 3<\log_2 4=2$

〈另解〉

$$\log_2 3=\frac{\log 3}{\log 2}\approx\frac{0.4771}{0.3010}\approx 1.59$$

(5) ○：$0<3^{-\pi}<3^0=1$

故選(3)(4)(5)。

5. (1)(3)(4)

出處：第二冊第三章〈機率〉、選修數學甲(下)第一章〈極限與函數〉

目標：評量考生對於無窮數列與無窮級數的基本認知能力，並結合機率的概念來解題

解析：(1) ○：因為 $a+b>1$，所以無窮數列 $\langle (a+b)^n\rangle$ 為收斂的機率是 0

(2) ╳：當 $-1<a-b\leq 1$ 時，無窮數列 $\langle (a-b)^n\rangle$ 為收斂

(i) $a-b=0$ 時，有 6 組

(ii) $a-b=1$ 時，有 5 組

所以其機率為 $\dfrac{6+5}{6^2}=\dfrac{11}{36}$

(3) ○：當 $-1<\dfrac{b}{a}\leq 1$ 時，無窮數列 $\left\langle\left(\dfrac{b}{a}\right)^n\right\rangle$ 為收斂

所以 $a\geq b$，其機率為 $\dfrac{C_2^{6+2-1}}{6^2}=\dfrac{21}{36}=\dfrac{7}{12}$

(4) ○：當 $-1<\dfrac{b}{a}<1$ 時，無窮級數 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{b}{a}\right)^n$ 為收斂

所以 $a>b$，又承(3)可知滿足 $a\geq b$ 的情形有 21 種

因此可得其條件機率為 $\dfrac{C_2^6}{21}=\dfrac{15}{21}=\dfrac{5}{7}$

(5) ╳：承(4)可知其條件機率為 1

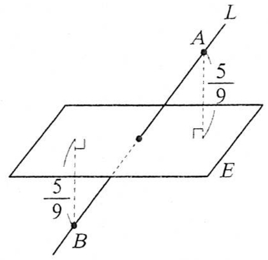
故選(1)(3)(4)。

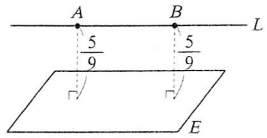
6. (1)(3)

出處：第四冊第二章〈空間中的平面與直線〉

目標：評量考生對於空間中直線方程式的認知能力，及是否能判斷空間中直線與平面的關係

解析：由題意可知直線 L 可能與平面 E 交於一點或平行，如下圖





設 $\overrightarrow{n}=(4,-7,4)$ 為平面 E 的一組法向量

(1) ○：可得參數式為 $\begin{cases}x=0\\y=1\\z=t\end{cases}$，$t\in R$，$\overrightarrow{\ell_1}=(0,0,1)$ 為此直線的一組方向向量

因為 $\overrightarrow{\ell_1}\cdot\overrightarrow{n}\neq 0$，所以此直線與平面 E 交於一點，即 $\begin{cases}x=0\\y=1\end{cases}$ 可能為直線 L

(2) ╳：可得參數式為 $\begin{cases}x=t\\y=1\\z=2-t\end{cases}$，$t\in R$，$\overrightarrow{\ell_2}=(1,0,-1)$ 為此直線的一組方向向量

且 $P_2(0,1,2)$ 為線上一點，因為 $\overrightarrow{\ell_2}\cdot\overrightarrow{n}=0$ 且 $4\times0-7\times1+4\times2=1$

所以此直線位於平面 E 上，即 $\begin{cases}y=1\\x+z=2\end{cases}$ 不可能為直線 L

(3) ○：$\overrightarrow{\ell_3}=(0,4,7)$ 為此直線的一組方向向量，且 $P_3(1,0,-2)$ 為線上一點

因為 $\overrightarrow{\ell_3}\cdot\overrightarrow{n}=0$ 且 $4\times1-7\times0+4\times(-2)\neq1$，所以此直線與平面 E 平行

又 $d(P_3,E)=\dfrac{|4\times1-7\times0+4\times(-2)-1|}{\sqrt{4^2+(-7)^2+4^2}}=\dfrac{5}{9}$

因此 $\begin{cases}x=1\\y=4t\\z=-2+7t\end{cases}$，$t\in R$ 可能為直線 L

(4) ╳：$\overrightarrow{\ell_4}=(4,4,3)$ 為此直線的一組方向向量，且 $P_4(4,5,5)$ 為線上一點

因為 $\overrightarrow{\ell_4}\cdot\overrightarrow{n}=0$ 且 $4\times4-7\times5+4\times5=1$

所以此直線位於平面 E 上，即 $\dfrac{x-4}{4}=\dfrac{y-5}{4}=\dfrac{z-5}{3}$ 不可能為直線 L

(5) ╳：$\overrightarrow{\ell_5}=(1,-4,-8)$ 為此直線的一組方向向量，且 $P_5(2,-1,0)$ 為線上一點

因為 $\overrightarrow{\ell_5}\cdot\overrightarrow{n}=0$ 且 $4\times2-7\times(-1)+4\times0\neq1$

所以此直線與平面 E 平行，但 $d(P_5,E)=\dfrac{|4\times2-7\times(-1)+4\times0-1|}{\sqrt{4^2+(-7)^2+4^2}}=\dfrac{14}{9}\neq\dfrac{5}{9}$

因此 $\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y+1}{-4}=\dfrac{z}{-8}$ 不可能為直線 L

故選(1)(3)。

7. (1)(4)(5)

出處：第四冊第三章〈矩陣〉、選修數學甲(上)第二章〈三角函數〉

目標：評量考生能否結合矩陣乘法與正餘弦函數的疊合定理來解題

解析：由矩陣乘法可知 $AB=\begin{bmatrix}\cos\alpha & \sin\alpha\\ \cos\beta & \sin\beta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & 6\\ 5 & 10\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\cos\alpha+5\sin\alpha & 6\cos\alpha+10\sin\alpha\\ 3\cos\beta+5\sin\beta & 6\cos\beta+10\sin\beta\end{bmatrix}$

$$=\begin{bmatrix}3\cos\alpha+5\sin\alpha & 2(3\cos\alpha+5\sin\alpha)\\ 3\cos\beta+5\sin\beta & 2(3\cos\beta+5\sin\beta)\end{bmatrix}$$

利用疊合定理可得 $-\sqrt{3^2+5^2}\leq 3\cos\alpha+5\sin\alpha\leq\sqrt{3^2+5^2}$

$\Rightarrow -\sqrt{34}\leq 3\cos\alpha+5\sin\alpha\leq\sqrt{34}$，同理 $-\sqrt{34}\leq 3\cos\beta+5\sin\beta\leq\sqrt{34}$

故選(1)(4)(5)。

8. (1)(4)

出處：選修數學甲(下)第二章〈多項式函數的微積分〉

目標：評量考生能否計算多項式的導函數，並具備多項式函數極值的基本概念

解析：可得 $f'(x)=3x^2+2ax+b$

因為 $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)}{x-2}=12$，所以 $\lim\limits_{x\to 2}f(x)=\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{f(x)}{x-2}\times(x-2)\right)=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)}{x-2}\times\lim\limits_{x\to 2}(x-2)=0$

$\Rightarrow f(2)=0\Rightarrow f'(2)=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)}{x-2}=12$

$\Rightarrow\begin{cases}8+4a+2b+c=0\\12+4a+b=12\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}4a+2b+c=-8\\4a+b=0\end{cases}\Rightarrow b=-4a\Rightarrow c=4a-8$

又 $f(x)$ 沒有極值，所以 $f'(x)=3x^2+2ax+b=0$ 沒有兩相異實根

即 $(2a)^2-4\times 3\times b\le 0\Rightarrow a^2-3b\le 0\Rightarrow a^2+12a\le 0\Rightarrow a(a+12)\le 0$

$\Rightarrow -12\le a\le 0\Rightarrow 0\le b\le 48$，$-56\le c\le -8$

故選(1)(4)。

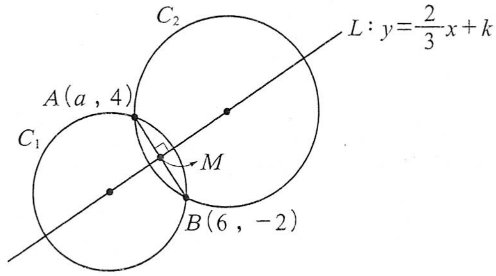
三、選填題

A. $\left(\dfrac{-5}{3},2\right)$

出處：第三冊第二章〈直線與圓〉

目標：評量考生對於圓與直線相交關係的基本認知能力，並利用直線的斜率來解題

解析：設 $\overline{AB}$ 中點為 M，作圖如右



可知直線 AB 與直線 L 垂直

即 $m_{AB}\times m_L=-1\Rightarrow\dfrac{-6}{6-a}\times\dfrac{2}{3}=-1$

$\Rightarrow a=2\Rightarrow A(2,4)$，由中點公式可得 $M(4,1)$

因為 $M(4,1)$ 位於直線 L 上，所以 $\dfrac{2}{3}\times 4+k=1\Rightarrow k=\dfrac{-5}{3}$

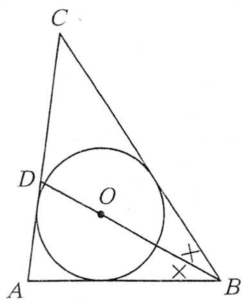
故數對 $(k,a)=\left(\dfrac{-5}{3},2\right)$。

B. 10

出處：第三冊第一章〈三角〉

目標：評量考生能否結合和角公式與正弦定理來解題

解析：作圖如右



由 $\cos A=\dfrac{1}{8}$，$\cos B=\dfrac{9}{16}$ 可得 $\sin A=\dfrac{3\sqrt{7}}{8}$，$\sin B=\dfrac{5\sqrt{7}}{16}$

$\Rightarrow\sin C=\sin(\pi-(A+B))=\sin(A+B)$

$=\sin A\cos B+\cos A\sin B=\dfrac{3\sqrt{7}}{8}\times\dfrac{9}{16}+\dfrac{1}{8}\times\dfrac{5\sqrt{7}}{16}=\dfrac{\sqrt{7}}{4}$

利用內角平分線定理及正弦定理可知

$\overline{AD}:\overline{CD}=\overline{BA}:\overline{BC}=\sin C:\sin A=\dfrac{\sqrt{7}}{4}:\dfrac{3\sqrt{7}}{8}=2:3$

又 $\overline{CD}=15$，故 $\overline{AD}=15\times\dfrac{2}{3}=10$。

C. $\dfrac{-1}{3}$

出處：第一冊第三章〈指數、對數函數〉

目標：評量考生是否能利用指數律來解指數方程式

解析：由指數律可得 $5^{3x+2}-2^{3x+3}=2^{3x+1}$

$\Rightarrow 5^{3x+2}=4\times 2^{3x+1}+2^{3x+1}=5\times 2^{3x+1}$

$\Rightarrow 5^{3x+1}=2^{3x+1}\Rightarrow\left(\dfrac{5}{2}\right)^{3x+1}=1\Rightarrow 3x+1=0\Rightarrow x=\dfrac{-1}{3}$。

第貳部分：非選擇題

一、(1) $\sqrt{10}$ ；(2) $2\sqrt{2}$ ；(3) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

出處：第四冊第一章〈空間向量〉

目標：評量考生是否具備空間基本概念，並能利用空間向量的內積與外積來解題

解析：(1)可知 $\overline{AC}=\overline{BC}=4\sqrt{2}\Rightarrow\overline{AQ}=\dfrac{1}{4}\overline{AC}=\sqrt{2}$

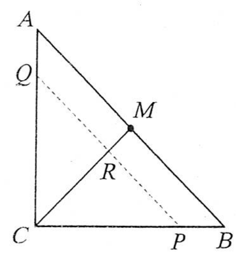
又 $\overline{AM}=\dfrac{1}{2}\overline{AB}=4$，$\angle QAM=45^\circ$

在 $\triangle AQM$ 中，由餘弦定理可得

$\overline{QM}=\sqrt{(\sqrt{2})^2+4^2-2\times\sqrt{2}\times4\times\cos45^\circ}=\sqrt{2+16-8}=\sqrt{10}$ 。

〈另解〉

設 $\overline{CM}$ 與 $\overline{QP}$ 交於 R 點，作圖如右



可知 $\dfrac{\overline{CQ}}{\overline{CA}}=\dfrac{\overline{CR}}{\overline{CM}}=\dfrac{\overline{QR}}{\overline{AM}}=\dfrac{3}{4}$

又 $\overline{AM}=\overline{BM}=\overline{CM}=4$

所以 $\overline{QR}=3$，$\overline{CR}=3$，$\overline{RM}=1$

因為 $\angle MRQ=90^\circ$

故 $\overline{QM}=\sqrt{\overline{QR}^2+\overline{RM}^2}=\sqrt{3^2+1^2}=\sqrt{10}$ 。

(2)因為 $\overline{C'Q}=\overline{CQ}=3\sqrt{2}$ 且 $\angle C'MQ=90^\circ$

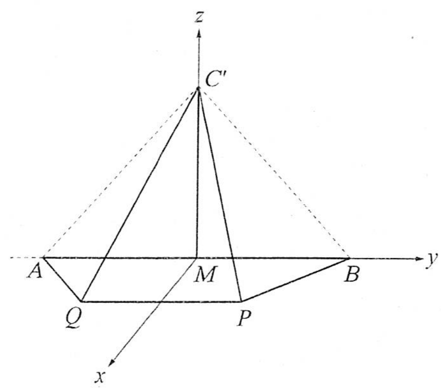
所以 $\overline{C'M}=\sqrt{\overline{C'Q}^2-\overline{QM}^2}=\sqrt{18-10}=2\sqrt{2}$ 。

〈另解〉

因為 $\overline{C'R}=\overline{CR}=3$，$\overline{RM}=1$，且 $\angle C'MR=90^\circ$

所以 $\overline{C'M}=\sqrt{\overline{C'R}^2-\overline{RM}^2}=\sqrt{3^2-1^2}=2\sqrt{2}$ 。

(3)坐標化，設 $M(0,0,0)$，$C'(0,0,2\sqrt{2})$，$A(0,-4,0)$，$Q(1,-3,0)$，如右圖



可得 $\overrightarrow{AQ}=(1,1,0)$，$\overrightarrow{AC'}=(0,4,2\sqrt{2})$

$\Rightarrow\overrightarrow{AQ}\times\overrightarrow{AC'}=\left(\begin{vmatrix}1&0\\4&2\sqrt{2}\end{vmatrix},\begin{vmatrix}0&1\\2\sqrt{2}&0\end{vmatrix},\begin{vmatrix}1&1\\0&4\end{vmatrix}\right)$

$=(2\sqrt{2},-2\sqrt{2},4)\,//\,(1,-1,\sqrt{2})$

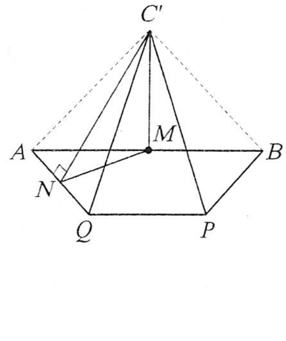
設 $\overrightarrow{n_1}=(1,-1,\sqrt{2})$，$\overrightarrow{n_2}=(0,0,1)$

分別為平面 AQC' 與平面 $ABPQ$ 的一組法向量

故 $\cos\theta=\left|\dfrac{\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}}{|\overrightarrow{n_1}||\overrightarrow{n_2}|}\right|=\dfrac{\sqrt{2}}{2\times1}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ 。

〈另解〉

設 $\overline{MN}$ 垂直 $\overline{AQ}$ 於 N 點，作圖如右



因為 $\overline{C'M}$ 垂直平面 $ABPQ$，且 $\overline{MN}\perp\overline{AQ}$

所以由三垂線定理可知 $\overline{C'N}\perp\overline{AQ}$

即 $\angle C'NM=\theta$

又 $\angle MAN=45^\circ$，且 $\overline{AM}=4$

因此 $\overline{MN}=4\sin45^\circ=2\sqrt{2}$

由 $\overline{MN}=\overline{C'M}=2\sqrt{2}$ 及 $\angle C'MN=90^\circ$ 可得 $\theta=45^\circ$

故 $\cos\theta=\cos45^\circ=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ 。

二、(1) $-4p^4+12p^3-12p^2+4p$；(2) $\dfrac{27}{64}$；(3) $\dfrac{1}{5}$

出處：選修數學甲(上)第一章〈機率統計〉、選修數學甲(下)第二章〈多項式函數的微積分〉

目標：評量考生對於二項分布的基本認知能力，並是否能利用多項式函數的微積分來解題

解析：(1) $f(p)=C^4_1p(1-p)^3$

$=4p(1-3p+3p^2-p^3)=-4p^4+12p^3-12p^2+4p$。

(2) $f'(p)=-16p^3+36p^2-24p+4=-4(4p^3-9p^2+6p-1)=-4(p-1)^2(4p-1)$

作表如下

p	0		$\frac{1}{4}$		1
$f'(p)$		$+$	0	$-$	0
$f(p)$	0	$\nearrow$	$f\left(\frac{1}{4}\right)$	$\searrow$	0

所以由一階檢定法可知在 $0<p<1$ 的條件下，

$f(p)$ 的最大值為 $f\left(\dfrac{1}{4}\right)=4\times\dfrac{1}{4}\times\left(\dfrac{3}{4}\right)^3=\dfrac{27}{64}$。

(3) $\displaystyle\int_0^1 f(p)dp=4\int_0^1(-p^4+3p^3-3p^2+p)dp=4\left(-\frac{1}{5}p^5+\frac{3}{4}p^4-p^3+\frac{1}{2}p^2\right)\Bigg|_0^1$

$=4\left(-\dfrac{1}{5}+\dfrac{3}{4}-1+\dfrac{1}{2}\right)$

$=4\times\dfrac{1}{20}=\dfrac{1}{5}$。

非選擇題批改原則

第貳部分：非選擇題

一、(1) $\sqrt{10}$；(2) $2\sqrt{2}$；(3) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

出處：第四冊第一章〈空間向量〉

目標：評量考生是否具備空間基本概念，並能利用空間向量的內積與外積來解題

解析：(1)可知 $\overline{AC}=\overline{BC}=4\sqrt{2}\Rightarrow\overline{AQ}=\dfrac{1}{4}\overline{AC}=\sqrt{2}$

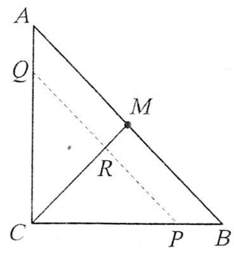
又 $\overline{AM}=\dfrac{1}{2}\overline{AB}=4$，$\angle QAM=45^\circ$　(2 分)

在$\triangle AQM$中，由餘弦定理可得

$\overline{QM}=\sqrt{(\sqrt{2})^2+4^2-2\times\sqrt{2}\times4\times\cos45^\circ}=\sqrt{2+16-8}=\sqrt{10}$。　(2 分)

〈另解〉

設 $\overline{CM}$ 與 $\overline{QP}$ 交於 R 點，作圖如右



可知 $\dfrac{\overline{CQ}}{\overline{CA}}=\dfrac{\overline{CR}}{\overline{CM}}=\dfrac{\overline{QR}}{\overline{AM}}=\dfrac{3}{4}$

又 $\overline{AM}=\overline{BM}=\overline{CM}=4$

所以 $\overline{QR}=3$，$\overline{CR}=3$，$\overline{RM}=1$　(2 分)

因為 $\angle MRQ=90^\circ$

故 $\overline{QM}=\sqrt{\overline{QR}^2+\overline{RM}^2}=\sqrt{3^2+1^2}=\sqrt{10}$。　(2 分)

(2)因為 $\overline{C'Q}=\overline{CQ}=3\sqrt{2}$ 且 $\angle C'MQ=90^\circ$

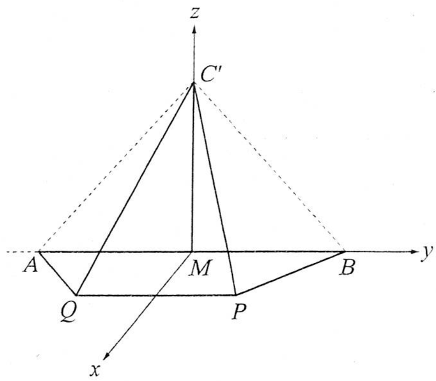
所以 $\overline{C'M}=\sqrt{\overline{C'Q}^2-\overline{QM}^2}=\sqrt{18-10}=2\sqrt{2}$。　(2 分)

〈另解〉

因為 $\overline{C'R}=\overline{CR}=3$，$\overline{RM}=1$，且 $\angle C'MR=90^\circ$

所以 $\overline{C'M}=\sqrt{\overline{C'R}^2-\overline{RM}^2}=\sqrt{3^2-1^2}=2\sqrt{2}$。　(2 分)

(3)坐標化，設 $M(0,0,0)$，$C'(0,0,2\sqrt{2})$，$A(0,-4,0)$，$Q(1,-3,0)$，如下圖



(1 分)

可得 $\overrightarrow{AQ}=(1,1,0)$，$\overrightarrow{AC'}=(0,4,2\sqrt{2})$　(1 分)

$\Rightarrow \overrightarrow{AQ}\times\overrightarrow{AC'}=\left(\begin{vmatrix}1 & 0\\ 4 & 2\sqrt{2}\end{vmatrix},\begin{vmatrix}0 & 1\\ 2\sqrt{2} & 0\end{vmatrix},\begin{vmatrix}1 & 1\\ 0 & 4\end{vmatrix}\right)=(2\sqrt{2},-2\sqrt{2},4)$　(1 分)

$// (1,-1,\sqrt{2})$

設 $\overrightarrow{n_1}=(1,-1,\sqrt{2})$，$\overrightarrow{n_2}=(0,0,1)$　(1 分)

分別為平面 AQC' 與平面 $ABPQ$ 的一組法向量，故 $\cos\theta=\left|\dfrac{\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}}{|\overrightarrow{n_1}||\overrightarrow{n_2}|}\right|=\dfrac{\sqrt{2}}{2\times 1}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$。　(2 分)

〈另解〉

設 $\overline{MN}$ 垂直 $\overline{AQ}$ 於 N 點，作圖如右，因為 $\overline{C'M}$ 垂直平面 $ABPQ$，且 $\overline{MN}\perp\overline{AQ}$

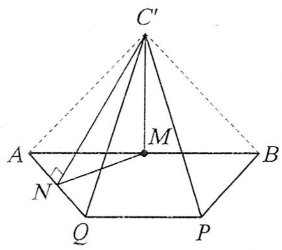
所以由三垂線定理可知 $\overline{C'N}\perp\overline{AQ}$，即 $\angle C'NM=\theta$　(2 分)

又 $\angle MAN=45^\circ$，且 $\overline{AM}=4$

因此 $\overline{MN}=4\sin 45^\circ=2\sqrt{2}$　(2 分)

由 $\overline{MN}=\overline{C'M}=2\sqrt{2}$ 及 $\angle C'MN=90^\circ$ 可得 $\theta=45^\circ$

故 $\cos\theta=\cos 45^\circ=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$。　(2 分)



二、(1)$-4p^4+12p^3-12p^2+4p$；(2)$\dfrac{27}{64}$；(3)$\dfrac{1}{5}$

出處：選修數學甲(上)第一章〈機率統計〉、選修數學甲(下)第二章〈多項式函數的微積分〉

目標：評量考生對於二項分布的基本認知能力，並是否能利用多項式函數的微積分來解題

解析：(1)$f(p)=C^4_1p(1-p)^3$　(1 分)

$=4p(1-3p+3p^2-p^3)=-4p^4+12p^3-12p^2+4p$。　(2 分)

(2)$f'(p)=-16p^3+36p^2-24p+4=-4(4p^3-9p^2+6p-1)=-4(p-1)^2(4p-1)$　(2 分)

作表如下

p	0		$\frac{1}{4}$		1
$f'(p)$		+	0	−	0
$f(p)$	0	↗	$f\left(\frac{1}{4}\right)$	↘	0

(2 分)

所以由一階檢定法可知在 $0<p<1$ 的條件下，

$f(p)$ 的最大值為 $f\left(\dfrac{1}{4}\right)=4\times\dfrac{1}{4}\times\left(\dfrac{3}{4}\right)^3=\dfrac{27}{64}$。　(1 分)

(3)$\int_0^1 f(p)dp=4\int_0^1(-p^4+3p^3-3p^2+p)dp=4\left(-\dfrac{1}{5}p^5+\dfrac{3}{4}p^4-p^3+\dfrac{1}{2}p^2\right)\Big|_0^1$　(2 分)

$=4\left(-\dfrac{1}{5}+\dfrac{3}{4}-1+\dfrac{1}{2}\right)$　(1 分)

$=4\times\dfrac{1}{20}=\dfrac{1}{5}$。　(1 分)