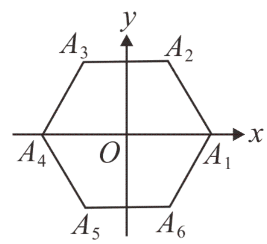
全國高中 108 年(107 學年度)高三下 第七次
指考模擬考數學(自然組)(107-E7)試題

俞克斌老師編寫

第壹部分：選擇題（占 76 分）

一、單選題（占 18 分）

1. 如右圖，$A_1A_2A_3A_4A_5A_6$為一正六邊形，其中原點O為中心點，且點A_1位於x軸正向上。今從A_1、A_2、A_3、A_4、A_5、A_6中任取相異兩點A_i與A_j，設點P滿足$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA_i}-\overrightarrow{OA_j}$，則點$P$位於第四象限的機率為下列何者？



(1)$\frac{2}{15}$ (2)$\frac{1}{6}$ (3)$\frac{1}{5}$ (4)$\frac{4}{15}$ (5)$\frac{8}{15}$。【108 全國指考模⑦】

答：(2)

解：$\dfrac{\underbrace{0}_{向量A_1A_k}+\underbrace{1}_{向量A_2A_k}+\underbrace{2}_{向量A_3A_k}+\underbrace{2}_{向量A_4A_k}+\underbrace{0}_{向量A_5A_k}+\underbrace{0}_{向量A_6A_k}}{P_2^6}=\dfrac{5}{30}=\dfrac{1}{6}$

2. 設三次實係數多項式$f(x)=x^3+ax^2+bx-12$，若α與$2\alpha-1-3\sqrt{3}i$為方程式$f(x)=0$的其中兩虛根，則$\alpha^{\frac{b}{2}}$之值為下列何者？

(1)$16-16\sqrt{3}i$ (2)$-1+2\sqrt{3}i$ (3)$-16-16\sqrt{3}i$ (4)$4+2\sqrt{3}i$ (5)$\frac{1}{64}+\frac{\sqrt{3}}{64}i$。

【108 全國指考模⑦】

答：(1)

解：$\alpha=p+qi$、$2\alpha-1-3\sqrt{3}i=p-qi\xrightarrow{p,q\in R}(p-1)+(3q-3\sqrt{3})i=0\Rightarrow\begin{cases}p=1\\q=\sqrt{3}\end{cases}$

故$f(x)=0$的三根為$1+\sqrt{3}i$、$1-\sqrt{3}i$、3（韋達定理：三根之積$=12$）

故$f(x)=x^3-5x^2+10x-12$

則$\alpha^{\frac{b}{2}}=(1+\sqrt{3}i)^5=\left[2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)\right]^5=32\left(\cos\frac{5\pi}{3}+i\sin\frac{5\pi}{3}\right)=16-16\sqrt{3}i$

3. 已知$O(0,0)$、$A(1,3)$、$B(1,4)$為坐標平面上三點，設k為非零實數，且二階方陣$M=\begin{bmatrix}k&-1\\30&-8\end{bmatrix}$為在坐標平面上定義的線性變換，可將點$O$映射到點$O'$，點$A$映射到點$A'$，點$B$映射到點$B'$，若$\overrightarrow{O'A'}$與$\overrightarrow{O'B'}$垂直，則$|\overrightarrow{O'A'}+3\overrightarrow{O'B'}|$之值為下列何者？

(1) 5　(2) $\sqrt{163}$　(3) 13　(4) 15　(5) $\sqrt{241}$ 。【108 全國指考模⑦】

答：(3)

解：$\begin{bmatrix} k & -1 \\ 30 & -8 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} k-3 & k-4 \\ 6 & -2 \end{bmatrix}$

$\overline{O'A'}\cdot\overline{O'B'}=(k-3,6)\cdot(k-4,-2)=k^2-7k=0\Rightarrow k=0$（不合）或 7

$\left|\overline{O'A'}+3\overline{O'B'}\right|=\left|(4,6)+3(3,-2)\right|=\left|(13,0)\right|=13$

二、多選題（占 40 分）

4. 試問滿足不等式 $|x|+|x-3|\le 3$ 的實數 x 可為下列哪些值？

（註：$\log 2\approx 0.3010$，$\log 3\approx 0.4771$）

(1) $\cos 2$　(2) $\tan^2 61°$　(3) $2^{\sqrt{2}}$　(4) $\log_2 3$　(5) $3^{-\pi}$ 。【108 全國指考模⑦】

答：(3)(4)(5)

解：$|x|+|x-3|\le 3\Rightarrow |x|+|x-3|=3\Rightarrow 0\le x\le 3$

(1) $\cos 2<0$ (2) $\tan^2 61°>3$

5. 設投擲一個公正的骰子兩次依序出現的點數分別為 a 與 b，試問下列哪些選項是正確的？

(1)無窮數列〈$(a+b)^n$〉為收斂的機率是 0

(2)無窮數列〈$(a-b)^n$〉為收斂的機率是 $\frac{4}{9}$

(3)無窮數列 $\left\langle\left(\frac{b}{a}\right)^n\right\rangle$ 為收斂的機率是 $\frac{7}{12}$

(4)在無窮數列 $\left\langle\left(\frac{b}{a}\right)^n\right\rangle$ 為收斂的條件下，無窮級數 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{b}{a}\right)^n$ 為收斂的機率是 $\frac{5}{7}$

(5)在無窮級數 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{b}{a}\right)^n$ 為收斂的條件下，無窮數列 $\left\langle\left(\frac{b}{a}\right)^n\right\rangle$ 為收斂的機率是 $\frac{5}{7}$ 。

【108 全國指考模⑦】

答：(1)(3)(4)

解：(1) $2\le a+b\le 12$，必發散

(2) $a-b=0,1$ 才會收斂，機率為 $\frac{6+5}{36}$

(3) $a\ge b$，$\left\langle\left(\frac{b}{a}\right)^n\right\rangle$ 才會收斂，機率為 $\frac{H^6_2}{36}=\frac{7}{12}$

(4) $a\ge b$，$\left\langle\left(\frac{b}{a}\right)^n\right\rangle$ 才會收斂，$a>b$，$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{b}{a}\right)^n$ 才會收斂，條件機率為 $\frac{C^6_2}{H^6_2}=\frac{5}{7}$

(5)條件機率為$\dfrac{H^6_2}{H^6_2}=1$

6. 在坐標空間中，A、B為直線L上相異兩點，若A、B兩點到平面E：$4x-7y+4z=1$的距離均為$\dfrac{5}{9}$，則下列哪些選項中的直線可能為直線L？

(1)$\begin{cases} x=0 \\ y=1 \end{cases}$ (2)$\begin{cases} y=1 \\ x+z=2 \end{cases}$ (3)$\begin{cases} x=1 \\ y=4t \\ z=-2+7t \end{cases}$，$t\in R$ (4)$\dfrac{x-4}{4}=\dfrac{y-5}{4}=\dfrac{z-5}{3}$

(5)$\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y+1}{-4}=\dfrac{z}{-8}$。 【108全國指考模⑦】

答：(1)(3)

解：$\overline{N}=(4,-7,4)$、

$\overline{L_1}=(0,0,1)$與$\overline{N}$不垂直，故L_1與E交於一點，可以找到兩點$\in L$，並到E距離相等

$\overline{L_2}=(1,0,-1)\perp\overline{N}$，且$L_2$上點$(2,1,0)\in E$，故不合

$\overline{L_3}=(0,4,7)\perp\overline{N}$，且$L_3$上點$(1,0,-2)\notin E$，又$d((1,0,-2),E)=\dfrac{5}{9}$，故合

$\overline{L_4}=(4,4,3)\perp\overline{N}$，且$L_4$上點$(4,5,5)\in E$，故不合

$\overline{L_5}=(1,-4,-8)\perp\overline{N}$，且$L_5$上點$(2,-1,0)\notin E$，但$d((2,-1,0),E)=\dfrac{14}{9}$，故不合

7. 已知$0\le\alpha<2\pi$，$0\le\beta<2\pi$，若矩陣$A=\begin{bmatrix}\cos\alpha & \sin\alpha \\ \cos\beta & \sin\beta\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}3 & 6 \\ 5 & 10\end{bmatrix}$，

則AB可能為下列哪些矩陣？

(1)$\begin{bmatrix}2 & 4 \\ 4 & 8\end{bmatrix}$ (2)$\begin{bmatrix}4 & 8 \\ -6 & -12\end{bmatrix}$ (3)$\begin{bmatrix}5 & 4 \\ -5 & 3\end{bmatrix}$ (4)$\begin{bmatrix}\sqrt{31} & 2\sqrt{31} \\ -\sqrt{29} & -2\sqrt{29}\end{bmatrix}$

(5)$\begin{bmatrix}\sqrt{2} & \sqrt{8} \\ \sqrt{2} & \sqrt{8}\end{bmatrix}$。 【108全國指考模⑦】

答：(1)(4)(5)

解：$\begin{bmatrix}\cos\alpha & \sin\alpha \\ \cos\beta & \sin\beta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & 6 \\ 5 & 10\end{bmatrix}$

$=\begin{bmatrix}-\sqrt{34}\le 3\cos\alpha+5\sin\alpha\le\sqrt{34} & -2\sqrt{34}\le 2(3\cos\alpha+5\sin\alpha)\le 2\sqrt{34} \\ -\sqrt{34}\le 3\cos\beta+5\sin\beta\le\sqrt{34} & -2\sqrt{34}\le 2(3\cos\beta+5\sin\beta)\le 2\sqrt{34}\end{bmatrix}$

8. 設三次實係數多項式$f(x)=x^3+ax^2+bx+c$，若$f(x)$沒有極值，且$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)}{x-2}=12$，則下列哪些選項是正確的？

(1) a 之值可能為 0　(2) a 之值可能為 2　(3) b 之值可能為 -2　(4) b 之值可能為 2
(5) c 之值可能為 0 。　【108 全國指考模⑦】

答：(1)(4)

解：$f'(x)=3x^2+2ax+b$，因為 $f(x)$ 沒有極值，故 $(2a)^2-4\times3\times b\le0\Rightarrow a^2\le3b$

又 $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{f(x)}{x-2}=12\Rightarrow\begin{cases}f(2)=8+4a+2b+c=0\\ \lim\limits_{x\to2}\dfrac{f'(x)}{1}=12+4a+b=12\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}4a+2b+c=-8\\4a+b=0\end{cases}$

故 $\begin{cases}b=-4a\\c=4a-8\end{cases}$ 且 $-12\le a\le0$

三、選填題：（占 18 分）

A. 已知圓 C_1 與圓 C_2 相交於 $A(a,4)$，$B(6,-2)$ 兩點，且兩圓的圓心皆位於直線 $L: y=\dfrac{2}{3}x+k$ 上，則數對 $(k,a)=$______。(化為最簡分數)　【108 全國指考模⑦】

答：$\left(\dfrac{-5}{3},2\right)$

解：斜率 $m_{AB}\perp m_L\Rightarrow\dfrac{6}{a-6}\times\dfrac{2}{3}=-1\Rightarrow a=2$

L 過 $\overline{AB}$ 中點 $M(4,1)\Rightarrow1=\dfrac{2}{3}\times4+k\Rightarrow k=\dfrac{-5}{3}$

B. 在 ΔABC 中，已知 $\cos A=\dfrac{1}{8}$，$\cos B=\dfrac{9}{16}$，O 為 ΔABC 的內切圓圓心，若直線 BO 交 $\overline{AC}$ 於 D 點，且 $\overline{CD}=15$，則 $\overline{AD}=$______。　【108 全國指考模⑦】

答：10

解：$\cos A=\dfrac{1}{8}$、$\sin A=\dfrac{3\sqrt{7}}{8}$、$\cos B=\dfrac{9}{16}$、$\sin B=\dfrac{5\sqrt{7}}{16}$、$\sin C=\sin(A+B)=\dfrac{\sqrt{7}}{4}$

$\dfrac{\overline{CD}}{\overline{AD}}=\dfrac{\overline{BC}}{\overline{BA}}\xrightarrow{\text{正弦定律}}\dfrac{15}{\overline{AD}}=\dfrac{\sin A}{\sin C}\Rightarrow\overline{AD}=15\times\dfrac{\frac{\sqrt{7}}{4}}{\frac{3\sqrt{7}}{8}}=10$

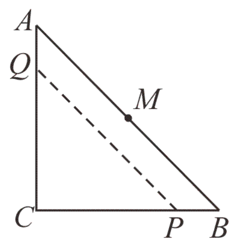
C. 試求指數方程式 $5^{3x+2}-8^{x+1}=\left(\sqrt{2}\right)^{6x+2}$ 的實數解為 $x=$______。(化為最簡分數)
【108 全國指考模⑦】

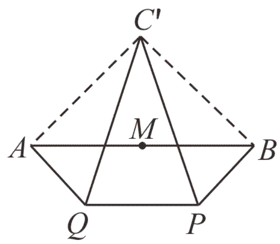
答：$\dfrac{-1}{3}$

解：$25\left(5^{3x}\right)-8\left(2^{3x}\right)=2\left(2^{3x}\right)\Rightarrow\left(\dfrac{5}{2}\right)^{3x}=\dfrac{10}{25}\Rightarrow3x=-1\Rightarrow x=-\dfrac{1}{3}$

第貳部分：非選擇題（占 24 分）

1. 在ΔABC中，$\overline{AB}=8$，$\overline{AC}=\overline{BC}$，$\angle C=90°$，$\overline{AB}$的中點為$M$，且$P$、$Q$分別為$\overline{BC}$、$\overline{AC}$上一點，並滿足$\overline{BP}=\dfrac{1}{4}\overline{BC}$，$\overline{AQ}=\dfrac{1}{4}\overline{AC}$。今將$\Delta CPQ$沿$\overline{PQ}$向上折起，已知折起後得四角錐$C'-ABPQ$，其中$C'$在平面$ABPQ$的投影點恰為$M$點。請參見示意圖





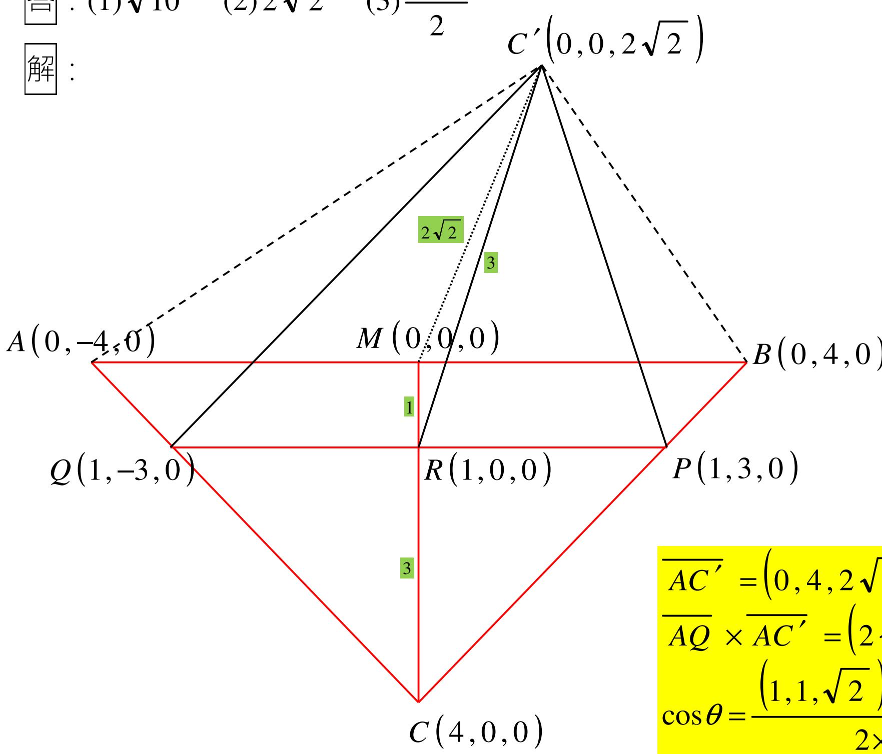
(1)試求$\overline{QM}$的長度

(2)試求$\overline{C'M}$的長度

(3)若平面AQC'與平面$ABPQ$的銳夾角為θ，則$\cos\theta=$_________。　【108 全國指考模⑦】

答：(1)$\sqrt{10}$　(2)$2\sqrt{2}$　(3)$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

解：



$\overrightarrow{AC'}=(0,4,2\sqrt{2}),\ \overrightarrow{AQ}=(1,1,0)$

$\overrightarrow{AQ}\times\overrightarrow{AC'}=(2\sqrt{2},2\sqrt{2},4)//(1,1,\sqrt{2})$

$\cos\theta=\dfrac{(1,1,\sqrt{2})\cdot(0,0,1)}{2\times1}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

2. 剛滿 18 歲的阿樹為了在上大學前取得汽車駕照，於是利用暑假期間參加邱名汽車駕訓班，假設阿樹每次練習倒車入庫時，因為車輪壓管線而被扣分的機率為p，其中每次練習結果為互相獨立。若阿樹連續練習四次倒車入庫中恰一次因為車輪壓管線而被扣分的機率為$f(p)$，試回答下列問題：

(1)試將$f(p)$表為p的多項式

(2)在$0<p<1$的條件下，試求$f(p)$的最大值

(3)試求$\int_0^1 f(p)\,dp$之值　【108 全國指考模⑦】

$\boxed{答}$：(1) $-4p^4+12p^3-12p^2+4p$　(2) $\frac{27}{64}$　(3) $\frac{1}{5}$

$\boxed{解}$：(1) $f(p)=C_1^4 p(1-p)^3=-4p^4+12p^3-12p^2+4p$

(2) $f'(p)=-16p^3+36p^2-24p+4=-4(4p-1)(p-1)^2$

在 $0<p<1$ 的條件下，$f(p)$ 的最大值 $f\left(\frac{1}{4}\right)=\frac{27}{64}$

(3) $\int_0^1 f(p)\,dp=\left[-\frac{4}{5}p^5+3p^4-4p^3+2p^2+C\right]_0^1=\frac{1}{5}$