全國高中 108 年(107 學年度)高三下第八次
指考模擬考數學(自然組) (107-E8) 試題

俞克斌老師編寫

第壹部分：選擇題（占 76 分）

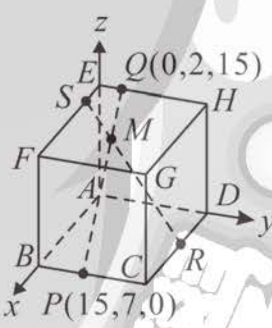
一、單選題（占 12 分）

1. 定義「單位向量」是長度為1的向量，若$\overrightarrow{a}$為平面上的一個單位向量，$\overrightarrow{b}$、$\overrightarrow{c}$為空間中的兩個相異單位向量，則下列選項何者錯誤？
(1)在平面上，最多存在兩個相異的單位向量分別與$\overrightarrow{a}$垂直
(2)在空間中，若$\overrightarrow{b}$與$\overrightarrow{c}$互相垂直，則最多存在兩個相異的單位向量分別與$\overrightarrow{b}$、$\overrightarrow{c}$都垂直
(3)在空間中，若$\overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{c}\neq 0$，則最多存在兩個相異的單位向量分別與$\overrightarrow{b}$、$\overrightarrow{c}$都垂直
(4)在平面上，存在$\overrightarrow{d}$滿足$\overrightarrow{d}\cdot\overrightarrow{a}=0$且$\overrightarrow{d}=r\overrightarrow{a}$（$r$為實數）
(5)在空間中，$\overrightarrow{b}\times\overrightarrow{c}$也可能是單位向量。【108 全國指考模⑧】

答：(3)

解：(3)當$\overrightarrow{b}=-\overrightarrow{c}$，則有無限多組單位向量同時垂直$\overrightarrow{b}$、$\overrightarrow{c}$
(4)當$\overrightarrow{d}=\overrightarrow{0}$，合於條件
(5)當$\overrightarrow{b}\perp\overrightarrow{c}$時，合於條件

2. 空間中有一個邊長為15的正立方體$ABCD-EFGH$，將頂點A放置於空間坐標系原點$(0,0,0)$的位置，頂點B於x軸正向上，頂點D於y軸正向上，頂點E於z軸正向上，如右圖。點P、Q、R、S分別在$\overline{BC}$、$\overline{EH}$、$\overline{CD}$、$\overline{EF}$上，其中P、Q的坐標為$P(15,7,0)$、$Q(0,2,15)$且$\overline{PQ}$與$\overline{RS}$相交於點M，則點M的坐標為何？



(1)$(3,3,12)$ (2)$(6,4,9)$ (3)$(9,5,6)$ (4)$(12,6,3)$
(5)R、S坐標不唯一，所以點M的坐標不唯一。【108 全國指考模⑧】

答：(1)

解：$S(t,0,15)$、$M(15-15s,7-5s,15s)$、$R(r,15,0)$共線

$$\Rightarrow \overrightarrow{SM}\,//\,\overrightarrow{SR}\Rightarrow \frac{15-15s-t}{r-t}=\frac{7-5s}{15}=\frac{15s-15}{-15}$$

$$\Rightarrow s=\frac{4}{5}\Rightarrow M(3,3,12)$$

二、多選題（占 32 分）

3. 已知實係數多項式$f(x)=\sqrt{2019}x^3-2020x^2+1$，則方程式$f(x)=0$的實根在下列哪些選項的區間內？
(1)$\left(-\infty,-\sqrt{2019}\right)$ (2)$\left[-\sqrt{2019},-1\right)$ (3)$[-1,1)$ (4)$\left[1,\sqrt{2019}\right)$ (5)$\left[\sqrt{2019},\infty\right)$。
【108 全國指考模⑧】

答：(3)(5)

解：$f\left(-\sqrt{2019}\right)=-2019^2-2020\times 2019+1<0$

$f(-1)=-\sqrt{2019}-2020+1<0$

$f(0)=1>0$

$f(1)=\sqrt{2019}-2020+1<0$

$f\left(\sqrt{2019}\right)=2019^{2}-2020\times 2019+1<0$

$f(+\infty)>0$（領導係數為正）

由勘根定理得知：在區間$(-1,0)$、$(0,1)$、$\left(\sqrt{2019},+\infty\right)$內各有一實根

4. 已知存在正實數a、b滿足關係式$\log(a+b)=\log a\cdot\log b$，則下列哪些選項可能成立？（$\log 2\approx 0.3010$）

(1)$a=1$或$b=1$　(2)$0<a<1<b$　(3)$0<a$、$b<1$　(4)$a=b<1$　(5)$a=b>10$。

【108 全國指考模⑧】

答：(3)(4)(5)

解：(1)$(a,b)=(1,1)$或$(1,非1)$或$(非1,1)$皆不合

(2)若$0<a<1<b$，則$\log a<0$，$\log b>0$，$\log(a+b)>0$，不合

(3)(4)(5)令$a=b=t$，則$\log 2t=(\log t)^{2}$

$$\Rightarrow(\log t)^{2}-(\log t)-(\log 2)=0\Rightarrow\log t=\frac{1\pm\sqrt{1+4\log 2}}{2}$$

當$a=b=t=10^{\frac{1+\sqrt{1+4\log 2}}{2}}>10^{1}=10$

當$a=b=t=10^{\frac{1-\sqrt{1+4\log 2}}{2}}<10^{0}=1$

5. 數學課老師用取球方式進行遊戲，由同學從裝有相同材質的紅球m顆與白球n顆（m、n皆為正整數）的不透明箱中取球，規定「每局」為連續取球兩次，每次取出一球記錄顏色後放回箱中（每次取球結果互相獨立且每一球被取出的機率相等）。每一位同學玩遊戲最多三局，過程中，若某局取出兩球為同色球即「失敗」且結束該次遊戲換下一位同學；若連續三局皆取出相異色球，則此同學遊戲「成功」，請選出正確的選項：

(1)當$m=2$，$n=3$時，玩一次遊戲成功的機率為$\left(\frac{6}{25}\right)^{3}$

(2)不論箱中裝有多少顆球，玩一次遊戲成功的機率不大於$\frac{1}{8}$

(3)當$|m-n|$（紅白球數差距）愈大，玩一次遊戲成功的機率愈小

(4)當$m=n$時，連續60位同學玩遊戲全都失敗的機率為$\frac{7^{60}}{2^{180}}$

(5)可以找到適當的(m,n)，讓連續玩遊戲60次全都失敗機率大於$\frac{1}{2}$。【108 全國指考模⑧】

答：(2)(4)(5)

解：(1)機率應為$\left(\frac{2}{5}\times\frac{3}{5}\times 2!\right)^{3}$

$$(2)\left(\frac{m}{m+n}\times\frac{n}{m+n}\times 2!\right)^3 \xrightarrow[\frac{1}{(m+n)^2}\le\frac{1}{4mn}]{m+n\ge 2\sqrt{mn}} \le\left(\frac{2mn}{4mn}\right)^3=\frac{1}{8}$$

(3)當$\dfrac{m}{n}$為定值，則機率為定值，與$\left|m-n\right|$大小無關

（例如：$(m,n)=(10,1)$，$(100,10)$，$(1000,100)$，……，機率均相同）

$$(4)\left[1-\left(\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times 2!\right)^3\right]^{60}=\left(\frac{7}{8}\right)^{60}=\frac{7^{60}}{2^{180}}$$

$$(5)\left[1-\left(\frac{m}{m+n}\times\frac{n}{m+n}\times 2!\right)^3\right]^{60}>\frac{1}{2}\Rightarrow\left(\frac{2mn}{(m+n)^2}\right)^3<1-\sqrt[60]{\frac{1}{2}}$$

當$\dfrac{m}{n}\to\infty$（或$\dfrac{n}{m}\to 0$），上式顯然成立

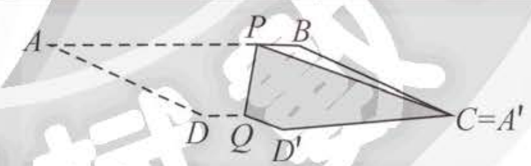
6. 單項函數Γ：$y=f(x)=x^n$，其中正整數$n\ge 2$，若點$P(t,f(t))$為函數圖形上任意一點，過P點的切線為直線L，則下列哪些選項是正確的？
(1)若$n=2$，則圖形Γ與圖形L一定只相交於P一點
(2)若$n=2$，則圖形Γ在圖形L上方（除P點之外）
(3)若$n=3$，則圖形Γ與圖形L的交點個數可能是2
(4)若$n=3$，則圖形Γ可能在圖形L上方（除P點之外）
(5)若$n\ge 2$，則存在某些P點使得圖形Γ與圖形L的交點個數是$n-1$個。
【108 全國指考模⑧】

答：(1)(2)(3)

解：(1)(2)$n=2$，$y=f(x)$為開口向上拋物線，故成立
(3)(4)(5)$n=3$時，若$P(0,0)$，則僅一切線，一交點
若$P\ne(0,0)$，則僅一切線，二交點
故(3)對，(4)(5)錯

三、選填題：（占32分）

A. 如右圖，平面上有一個平行四邊形$ABCD$沿著$\overline{PQ}$對摺，恰好讓對角線的兩頂點A、C重合，其中點P、Q分別在$\overline{AB}$、$\overline{CD}$上，且$\overline{AP}=2\sqrt{6}$，$\overline{AD}=4$，$\cos D=-\dfrac{\sqrt{30}}{6}$，則摺痕長度$\overline{PQ}=$________。
（化為最簡根式）

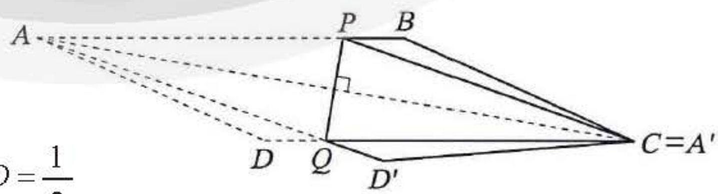


【108 全國指考模⑧】

答：$4\left(\sqrt{2}-1\right)$

解：$\dfrac{\overline{AQ}}{\sin\angle ADQ}=\dfrac{\overline{AD}}{\sin\angle AQD}$

$$\Rightarrow\frac{2\sqrt{6}}{\frac{\sqrt{6}}{6}}=\frac{4}{\sin\angle AQD}\Rightarrow\sin\angle AQD=\frac{1}{3}$$



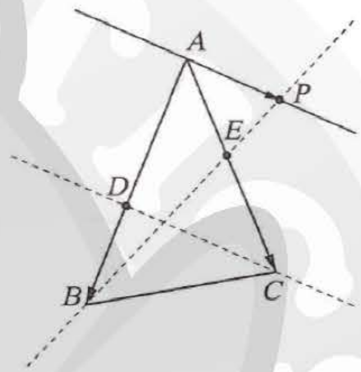
$$\cos\angle AQP=\sqrt{\frac{1+\cos\angle AQC}{2}}=\sqrt{\frac{1-\cos\angle AQD}{2}}=\sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{8}}{3}}{2}}=\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{6}}$$

$$\overline{PQ}=2\,\overline{AQ}\cos\angle AQP=2\times2\sqrt{6}\times\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{6}}=4\left(\sqrt{2}-1\right)$$

B. 在ΔABC中，點D、E分別在$\overline{AB}$、$\overline{AC}$上，且$\overline{AD}:\overline{DB}=3:2$，$\overline{AE}:\overline{EC}=4:5$，現在過$A$點作與$\overleftrightarrow{CD}$平行的直線並與$\overleftrightarrow{BE}$交於$P$點，則$\overrightarrow{AP}=$________。（化為最簡分數）

【108全國指考模⑧】

答：$-\frac{4}{11}\overrightarrow{AB}+\frac{20}{33}\overrightarrow{AC}$



解：$\overrightarrow{AP}=\frac{5}{2}\overrightarrow{DF}=\frac{5t}{2}\overrightarrow{DC}=\frac{5t}{2}\left(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AD}\right)$

$\overrightarrow{AP}=\frac{5t}{2}\times\frac{9}{4}\overrightarrow{AE}-\frac{5t}{2}\times\frac{3}{5}\overrightarrow{AB}$

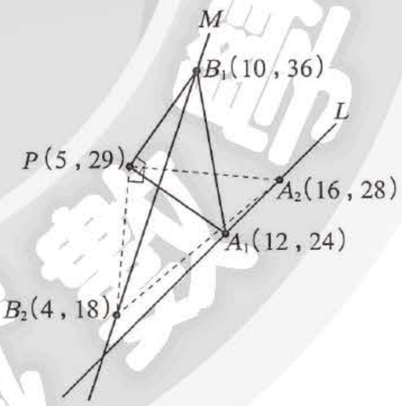
$\xrightarrow{B、E、P\text{共線}}\frac{45t}{8}-\frac{3t}{2}=1\quad\therefore t=\frac{8}{33}$

$\therefore\overrightarrow{AP}=\frac{20}{33}\left(\overrightarrow{AC}-\frac{3}{5}\overrightarrow{AB}\right)=-\frac{4}{11}\overrightarrow{AB}+\frac{20}{33}\overrightarrow{AC}$

C. 平面上有兩直線$L:\begin{cases}x=-2+t\\y=10+t\end{cases}$（$t\in R$）與$M:\begin{cases}x=-1+s\\y=3+3s\end{cases}$（$s\in R$）。$\Delta PAB$是等腰三角形，其中$P$點坐標為$P(5,29)$，點$A$、$B$分別在直線$L$、$M$上且$\angle APB=90^\circ$，已知滿足這樣條件的三角形有兩個，則這兩個三角形的面積和為________。

【108全國指考模⑧】

答：98



解：$\overrightarrow{PA}=(t-7,t-19)$，$\overrightarrow{PB}=(s-6,3s-26)$

$\left|\overrightarrow{PA}\right|=\left|\overrightarrow{PB}\right|$且$\overrightarrow{PA}\perp\overrightarrow{PB}$

$\Rightarrow\begin{cases}t-7=3s-26\\t-19=-s+6\end{cases}$或$\begin{cases}t-7=-3s+26\\t-19=s-6\end{cases}$

$\Rightarrow\begin{cases}t=14\\s=11\end{cases}$或$\begin{cases}t=18\\s=5\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\overrightarrow{PA}=(7,-5)\\\overrightarrow{PB}=(5,7)\end{cases}$或$\begin{cases}\overrightarrow{PA}=(11,-1)\\\overrightarrow{PB}=(-1,-11)\end{cases}$

$\Rightarrow\Delta PAB=\frac{1}{2}\left\|\begin{matrix}7&-5\\5&7\end{matrix}\right\|$或$\frac{1}{2}\left\|\begin{matrix}11&-1\\-1&-11\end{matrix}\right\|=37$或$61$

故面積總和$=98$

D. 空間中有一四面體，6個稜長中有5個為$\sqrt{6}$，1個為x（其中$x\neq\sqrt{6}$）；另一個體積相同的四面體，6個稜長中有4個為$\sqrt{6}$，2個為x，且兩個稜長為x的邊不相鄰，則$x=$________。（參考公式：四面體體積$=\frac{1}{3}\times$底面積$\times$高）

【108全國指考模⑧】

答：3

解：兩四面體（三角錐），

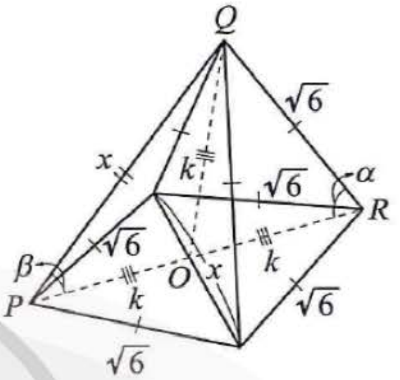
皆以$\sqrt{6}$、$\sqrt{6}$、x的三角形作底面

且以 x 為共同邊，則由畢氏定理知共同高為

$h^2=x^2-y^2=z^2-(z-y)^2=6-(2z-y)^2$，

其中 $z^2=6-\dfrac{x^2}{4}$

$\Rightarrow x=3$，$z=\dfrac{\sqrt{15}}{2}$，$y=\dfrac{9}{\sqrt{15}}$，$h=\dfrac{\sqrt{21}}{2}$



第貳部分：非選擇題（占 24 分）

1. 已知 x 為大於1的正整數，令 $g(x)=(-1)^n(x-1)(2x-1)\cdots\cdots(kx-1)\cdots\cdots(nx-1)(ax+b)$ 為實係數 $n+1$ 次多項式（$1\le k\le n$），且 $g(0)=-1$，$g'(0)=0$，當 $x\neq0$ 時，定義 $f(x)=\dfrac{g(x)+1}{x^2}$，則：

   (1)試求 a、b 的值。

   (2)試求實係數方程式 $f(x)=\dfrac{1}{x^2}$ 的所有實根並討論是否有重根。 【108 全國指考模⑧】

答：(1) $a=-\dfrac{n(n+1)}{2}$，$b=-1$

(2) $n+1$ 個相異根：1，$\dfrac{1}{2}$，$\dfrac{1}{3}$，……，$\dfrac{1}{n}$，$-\dfrac{2}{n(n+1)}$，所有實根皆相異無重根

解：$g(0)=(-1)^n(-1)^n(b)=-1\Rightarrow b=-1$

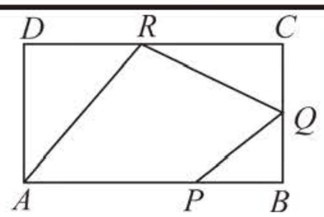
$$g'(x)=(-1)^n\left[\begin{array}{l}(2x-1)(3x-1)\cdots\cdots(nx-1)(ax+b)\\+2(x-1)(3x-1)\cdots\cdots(nx-1)(ax+b)\\+3(x-1)(2x-1)\cdots\cdots(nx-1)(ax+b)\\+\cdots\cdots\\+n(x-1)(2x-1)\cdots\cdots((n-1)x-1)(ax+b)\\+a(x-1)(2x-1)\cdots\cdots((n-1)x-1)(nx-1)\end{array}\right]$$

$$g'(0)=(-1)^n\left[\begin{array}{l}(-1)^{n-1}(1+2+3+\cdots\cdots+n)b\\+a(-1)^n\end{array}\right]=0\Rightarrow a=-\frac{n(n+1)}{2}$$

$$\left(\begin{array}{l}\text{或 } g'(0)=0 \text{ 表 } x \text{ 項係數為 } 0\\\Rightarrow 1+2+3+\cdots\cdots+n+a=0\Rightarrow a=-\dfrac{n(n+1)}{2}\end{array}\right)$$

$$f(x)=\frac{g(x)+1}{x^2}=\frac{1}{x^2}\Rightarrow g(x)=0\Rightarrow x=1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \cdots\cdots,\ \frac{1}{n},\ -\frac{2}{n(n+1)}$$

2. 在長方形 $ABCD$ 中，$\overline{AB}=9$，$\overline{AD}=5$，分別在 $\overline{AB}$、$\overline{BC}$、$\overline{CD}$ 邊上取 P、Q、R 三點（這三點可以是長方形的頂點），使得 $\begin{cases}\overline{CQ}^2=2\overline{BP}\\\overline{CR}=2\overline{BQ}\end{cases}$，如右圖所示，試求：



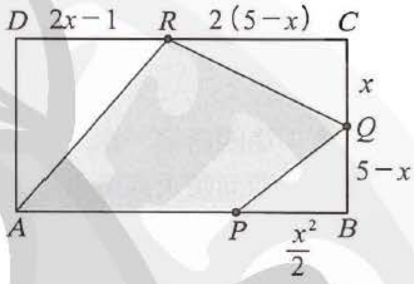
   (1) $\overline{CQ}$ 長度範圍。

(2)當 $\overline{CQ}$ 長度多少時，四邊形 $APQR$ 面積有最小值；
當 $\overline{CQ}$ 長度多少時，四邊形 $APQR$ 面積有最大值。 【108 全國指考模⑧】

答：(1)$\frac{1}{2} \le \overline{CQ} \le 3\sqrt{2}$ (2)4；$\frac{1}{2}$

解：令 $\overline{CQ}=x$，$\overline{BQ}=5-x\ge 0$，$\overline{BP}=\frac{x^2}{2}\ge 0$，$\overline{AP}=9-\frac{x^2}{2}\ge 0$

$\overline{CR}=10-2x\ge 0$，$\overline{DR}=2x-1\ge 0 \Rightarrow \frac{1}{2}\le x\le 3\sqrt{2}$



則 $APQR$ 面積

$=9\times 5-\frac{1}{2}\left[5(2x-1)+(10-2x)x+\frac{x^2}{2}(5-x)\right]$

$=\frac{1}{4}\left[x^3-x^2-40x+190\right]=\frac{1}{4}f(x)$

$f'(x)=3x^2-2x-40=(3x+10)(x-4)$

$f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1359}{8}$，$f(4)=78$，$f\left(3\sqrt{2}\right)=172-66\sqrt{2}$

當 $x=\frac{1}{2}$ 時，有最大面積 $\frac{1359}{32}$

當 $x=4$ 時，有最小面積 $\frac{39}{2}$