數學考科詳解

題號	1.	2.	3.	4.	5.	6.			
答案	(3)	(1)	(3)(5)	(3)(4)(5)	(2)(4)(5)	(1)(2)(3)			

第壹部分：選擇題

一、單選題

1. (3)

出處：第三冊第三章〈平面向量〉、第四冊第一章〈空間向量〉

目標：向量性質(係數積、內積、垂直、外積)

解析：(1) ○：在平面上令單位向量 $\overrightarrow{a}=(u,v)$，則只有單位向量 $(-v,u)$ 及 $(v,-u)$ 與 $\overrightarrow{a}$ 垂直

(2) ○：在空間中只有 $\pm(\overrightarrow{b}\times\overrightarrow{c})$ 這兩個向量分別與 $\overrightarrow{b}$，$\overrightarrow{c}$ 都垂直且為單位向量

$(\because|\overrightarrow{b}\times\overrightarrow{c}|=|\overrightarrow{b}||\overrightarrow{c}|\sin 90^\circ=1)$

(3) ╳：當 $\overrightarrow{b}=(1,0,0)=-\overrightarrow{c}$ 時，$\overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{c}\neq 0$，則單位向量 $(0,\cos\theta,\sin\theta)$ 分別與 $\overrightarrow{b}$，$\overrightarrow{c}$ 都垂直，

且單位向量 $(0,\cos\theta,\sin\theta)$ 有無限多個 (θ 為任意實數)

(4) ○：當 $\overrightarrow{d}=\overrightarrow{0}$ 時，$\overrightarrow{d}\cdot\overrightarrow{a}=0$ 且 $\overrightarrow{d}=0\overrightarrow{a}$

(5) ○：根據外積性質 $|\overrightarrow{b}\times\overrightarrow{c}|=|\overrightarrow{b}||\overrightarrow{c}|\sin\theta$，若 $|\overrightarrow{b}\times\overrightarrow{c}|=1$，則

$|\overrightarrow{b}\times\overrightarrow{c}|=|\overrightarrow{b}||\overrightarrow{c}|\sin\theta=\sin\theta=1\Leftrightarrow\theta=90^\circ$

故當 $\overrightarrow{b}$，$\overrightarrow{c}$ 兩向量互相垂直時其外積長度等於 1

故選(3)。

2. (1)

出處：第四冊第一章〈空間向量〉、第四冊第二章〈空間中的平面與直線〉

目標：空間坐標系統、分點公式

解析：假設坐標 $R(r,15,0)$，$S(s,0,15)$，其中 r，$s>0$

因為直線 PR 與直線 SQ 分別在兩平行平面上且又同在平面 $PRQS$ 上(兩直線不歪斜)，故兩直線互相平行

可得 $\overrightarrow{PR}\,//\,\overrightarrow{SQ}\Rightarrow(r-15,8,0)\,//\,(-s,2,0)\Rightarrow\dfrac{r-15}{-s}=\dfrac{8}{2}=4$

因此 $\overrightarrow{PR}=4\overrightarrow{SQ}$ 且 $\triangle MPR\sim\triangle MQS$，故 $\overline{PM}:\overline{MQ}=4:1$

由分點公式可得點 M 的坐標為 $\left(\dfrac{1\times15}{4+1},\dfrac{4\times2+7}{4+1},\dfrac{4\times15}{4+1}\right)=(3,3,12)$

故選(1)。

〈另解〉

點 M 為平面 $CDEF$：$y+z=15$ 與直線 PQ：$\dfrac{x-0}{15-0}=\dfrac{y-2}{7-2}=\dfrac{z-15}{0-15}\Rightarrow\dfrac{x}{3}=\dfrac{y-2}{1}=\dfrac{z-15}{-3}$ 的交點 $(3,3,12)$

故選(1)。

二、多選題

3. (3)(5)

出處：第一冊第二章〈多項式函數〉、選修數學甲(下)第一章〈極限與函數〉

目標：勘根定理判斷、區間符號

解析：$\sqrt{2019}x^3-2020x^2+1=0\Rightarrow x^2(\sqrt{2019}x-2020)+1=0$

x	-1	0	1	$\sqrt{2019}$	2019
$f(x)$	$-$	$+$	$-$	$-$	$+$

(注意要檢查 $f(0)=1$，確認有三個相異實根)

根據勘根定理，在區間 $(-1,0)$、$(0,1)$、$(\sqrt{2019},2019)$ 中均恰有一個實根

$\left(\text{三根分別是}\dfrac{\sqrt{2019}-\sqrt{2023}}{2},\dfrac{1}{\sqrt{2019}},\dfrac{\sqrt{2019}+\sqrt{2023}}{2}\right)$

故選(3)(5)。

4. (3)(4)(5)

出處：第一冊第三章〈指數、對數函數〉

目標：對數的定義與定律

解析：(1)╳：若 $a=1$，則 $\log(a+b)=\log a\cdot\log b\Rightarrow\log(1+b)=\log 1\cdot\log b=0=\log 1\Rightarrow b=0$，矛盾($\because b>0$)

當 $b=1$ 時也有相同性質，所以 a，b 皆不等於 1

(2)╳：當 $0<a<1<b$ 時，$\log a<0$，$\log b>0$，則 $\log a\cdot\log b<0$。但 $\log(a+b)>\log b>0$，矛盾

(3)○：取 $a=\frac{1}{10}$，則 $\log\left(\frac{1}{10}+b\right)=\log\frac{1}{10}\cdot\log b=-\log b=\log\frac{1}{b}$

則 $10b^2+b-10=0\Rightarrow b=\frac{-1\pm\sqrt{401}}{20}=\frac{19.\cdots}{20}<1$(負不合 $\because b>0$)

(4)(5)○：當 $a=b$ 時，關係式 $\log(a+b)=\log a\cdot\log b$ 可改寫為

$\log 2a=(\log a)^2\Rightarrow(\log a)^2-\log a-\log 2=0$

則 $\log a=\frac{1\pm\sqrt{1+4\log 2}}{2}\approx\frac{1\pm\sqrt{2.204}}{2}$

①當 $\log a\approx\frac{1+\sqrt{2.204}}{2}$ 時，$\log a>1\Rightarrow a>10$

②當 $\log a\approx\frac{1-\sqrt{2.204}}{2}$ 時，$\log a<0\Rightarrow 0<a<1$

故選(3)(4)(5)。

5. (2)(4)(5)

出處：第一冊第一章〈數與式〉、第二冊第三章〈機率〉、選修數學甲(上)第一章〈機率統計〉、選修數學甲(下)第一章〈極限與函數〉

目標：機率、算幾不等式、二項分布、極限

解析：令取出紅球的機率為 $p=\frac{m}{m+n}$，白球的機率為 $1-p=\frac{n}{m+n}$

(1)╳：當 $m=2$，$n=3$ 時，玩一次遊戲成功的機率為 $\left(2!\times\frac{2}{5}\times\frac{3}{5}\right)^3=\left(\frac{12}{25}\right)^3$

(2)○：根據算幾不等式 $\frac{p+(1-p)}{2}\geq\sqrt{p(1-p)}$，可得玩一次遊戲成功的機率為 $(2p(1-p))^3\leq\frac{1}{8}$

(3)╳：當 $(m,n)=(2,1)$ 與 $(m,n)=(4,2)$ 時，玩一次遊戲成功的機率相同

(4)○：當 $m=n$ 時，$p=1-p=\frac{1}{2}$，則連續 60 位同學玩遊戲全都失敗的機率為

$$\left(1-\left(2\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\right)^3\right)^{60}=\left(\frac{7}{8}\right)^{60}=\frac{7^{60}}{2^{180}}\approx 0.0003315$$

(5)○：$(1-(2p(1-p))^3)^{60}>\frac{1}{2}\Rightarrow 1-(2p(1-p))^3>\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{60}}$

$\Rightarrow(2p(1-p))^3<1-\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{60}}$

取 $p=\frac{1}{n+1}$，因 $\lim\limits_{n\to\infty}2p(1-p)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n}{n^2+2n+1}=0$

且 $1-\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{60}}$ 為一正實數$\left(因\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{60}}<1\right)$，

當 n 夠大時，不等式$(1-(2p(1-p))^3)^{60}>\frac{1}{2}$成立

事實上，當 $m=1$，$n=7$ 時，連續玩遊戲 60 次都失敗的機率為$\left(1-\left(2\times\frac{1}{8}\times\frac{7}{8}\right)^3\right)^{60}\approx 0.53$

故選(2)(4)(5)。

6. (1)(2)(3)

出處：選修數學甲(下)第二章〈多項式函數的微積分〉

目標：切線性質判斷與計算

解析：(1) ○：若 $n=2$，則圖形 Γ 為開口向上的拋物線，拋物線明顯與切線相交於切點一點 ($\Gamma=L$ 有兩重根，無其他交點)

(2) ○：承(1)，開口向上的拋物線圖形在切線上方(除切點之外)

(3) ○：若 $n=3$，則 $y=x^3 \Rightarrow y'=3x^2$，通過 $P(t, t^3)$ 的切線為 $L: y-t^3=3t^2(x-t)$

考慮 $x^3=3t^2x-2t^3 \Rightarrow x^3-3t^2x+2t^3=0 \Rightarrow (x-t)^2(x+2t)=0 \Rightarrow x=t$ 或 $-2t$

當 $t=0$ 時，只有一個交點。當 $t\neq 0$ 時，有兩個交點

(4) ╳：承(3)，只可能發生於一個交點時($t=0$)，但 $x^3\geq 0$ 不恆成立

(5) ╳：考慮 $y=x^4$，明顯切線與函數圖形只相交於一點，交點個數不為 3

故選(1)(2)(3)。

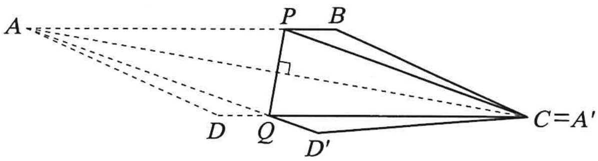
三、選填題

A. $4(\sqrt{2}-1)$

出處：第三冊第一章〈三角〉

目標：半角公式、正弦定理

解析：如右圖，因為四邊形 $APQD$ 與 $CPQD'$ 對稱於直線 PQ ($\overline{AC}$ 的中垂線)



故 $\overline{AQ}=\overline{AP}=2\sqrt{6}$

在△ADQ 中，$\dfrac{\overline{AQ}}{\sin\angle ADQ}=\dfrac{\overline{AD}}{\sin\angle AQD}$

$\Rightarrow \dfrac{2\sqrt{6}}{\frac{1}{\sqrt{6}}}=\dfrac{4}{\sin\angle AQD} \Rightarrow \sin\angle AQD=\dfrac{1}{3}$

$\therefore \cos\angle AQC=\cos(180^\circ-\angle AQD)$

$=-\cos\angle AQD=-\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

由半角公式可知，

$$\cos\angle AQP=\sqrt{\frac{1+\cos\angle AQC}{2}}=\sqrt{\frac{1-\frac{2\sqrt{2}}{3}}{2}}$$

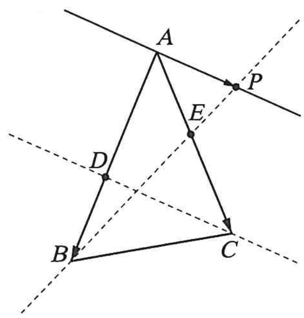
$$=\sqrt{\frac{3-2\sqrt{2}}{6}}=\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{6}}$$

故摺痕長度 $\overline{PQ}=2\times\overline{AQ}\times\cos\angle AQP=2\times 2\sqrt{6}\times\dfrac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{6}}=4(\sqrt{2}-1)$。

B. $-\dfrac{4}{11}\overrightarrow{AB}+\dfrac{20}{33}\overrightarrow{AC}$

出處：第三冊第三章〈平面向量〉

目標：向量平行與分點公式



解析：因 $\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AD}=-\dfrac{3}{5}\overrightarrow{AB}+\dfrac{9}{4}\overrightarrow{AE}$，且 $\overrightarrow{AP}\,//\,\overrightarrow{DC}$

因為 $-\dfrac{3}{5}:\dfrac{9}{4}=-4:15=\dfrac{-4}{11}:\dfrac{15}{11}$ 且 $B-E-P$ 三點共線，

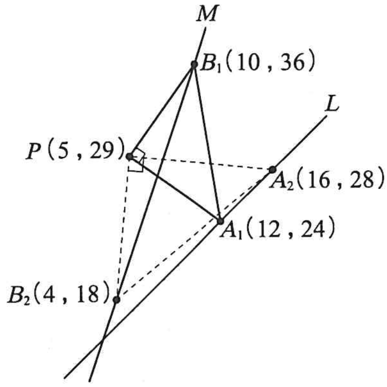
所以 $\overrightarrow{AP}=-\dfrac{4}{11}\overrightarrow{AB}+\dfrac{15}{11}\overrightarrow{AE}=-\dfrac{4}{11}\overrightarrow{AB}+\dfrac{20}{33}\overrightarrow{AC}$。

C. 98

出處：第三冊第三章〈平面向量〉

目標：等長向量垂直(內積、旋轉)與長度計算

解析：由直線參數式可假設 $\overrightarrow{PA}=(t-7\,,t-19)$，$\overrightarrow{PB}=(s-6\,,3s-26)$，
兩向量等長且垂直
因為等長向量 $(a\,,b)\perp(-b\,,a)$ 且 $(a\,,b)\perp(b\,,-a)$，
所以 $\begin{cases}t-7=3s-26\\t-19=-(s-6)\end{cases}$ 與 $\begin{cases}t-7=-(3s-26)\\t-19=s-6\end{cases}$
得 $\begin{cases}3s-t=19\\s+t=25\end{cases}$ 與 $\begin{cases}3s+t=33\\s-t=-13\end{cases}$
可求得 $(t\,,s)=(14\,,11)$ 與 $(18\,,5)$，因此 $\overrightarrow{PA}=(7\,,-5)$ 與 $(11\,,-1)$
如右圖所示
故兩個三角形的面積和為
$$\frac{|(7,-5)|^2+|(11,-1)|^2}{2}=\frac{7^2+(-5)^2+11^2+(-1)^2}{2}=98。$$

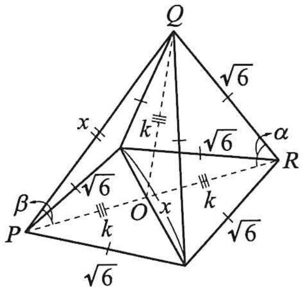


D. 3

出處：第四冊第一章〈空間向量〉

目標：四面體求高度

解析：如右圖，兩四面體皆以 $\sqrt{6}$，$\sqrt{6}$，x 邊長的三角形為底面
此時 $\cos\alpha=\dfrac{\sqrt{6}}{2k}$，$\cos\beta=\dfrac{x}{2k}$
$\left(\text{等腰三角形}\ (\sqrt{6},\sqrt{6},x)\ \text{底邊上的高}\ k=\sqrt{6-\dfrac{x^2}{4}},\ \alpha,\beta<90^\circ\right)$
四面體的高為 $\sqrt{6}\cdot\sin\alpha=x\cdot\sin\beta$
$\Rightarrow 6(1-\cos^2\alpha)=x^2(1-\cos^2\beta)$
$\Rightarrow 6\left(1-\dfrac{6}{4k^2}\right)=x^2\left(1-\dfrac{x^2}{4k^2}\right)\Rightarrow 6(4k^2-6)=x^2(4k^2-x^2)$
$\Rightarrow 6(18-x^2)=x^2(24-2x^2)$
$\Rightarrow x^4-15x^2+54=0\Rightarrow(x^2-9)(x^2-6)=0$
因為 $x^2\neq 6$，所以 $x^2=9$，故 $x=3$。(注意 $\sqrt{6}+\sqrt{6}>3$，$\sqrt{6}$，$\sqrt{6}$，3 可圍成三角形)
〈另解〉
將兩四面體合併，可得一四角錐(因為兩錐體等高且 $\overline{OQ}=k$ 為共同邊，$x\neq\sqrt{6}$)
$\therefore \sin\angle POQ=\sin\angle ROQ\Rightarrow\angle POQ$ 和 $\angle ROQ$ 互補
在 $\triangle PQR$ 中，因為 $\overline{OP}=\overline{OQ}=\overline{OR}=k$，所以 $\overline{PR}$ 的中點 O 為 $\triangle PQR$ 的外心，故 $\angle PQR=90^\circ$
因此 $x^2+6=(2k)^2=24-x^2\Rightarrow x=3$。



第貳部分：非選擇題

一、(1) $a=-\dfrac{n(n+1)}{2}$，$b=-1$；(2) $1,\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{3},\cdots\cdots,\dfrac{1}{n},-\dfrac{2}{n(n+1)}$，所有實根皆相異無重根

出處：第一冊第二章〈多項式函數〉

目標：多項式方程式係數與根

解析：(1) $g(0)=-1\Rightarrow(-1)^n\times(-1)^n\times b=-1\Rightarrow b=-1$
$g'(0)=0\Rightarrow g(x)$ 的一次項係數為 0
所以 $((-1)+(-2)+\cdots\cdots+(-n))b+a=0\Rightarrow a=-\dfrac{n(n+1)}{2}$
故 $a=-\dfrac{n(n+1)}{2}$，$b=-1$。
(2) $f(x)=\dfrac{1}{x^2}\Rightarrow x^2\cdot f(x)=1\Rightarrow g(x)=0$
則滿足 $g(x)=0$ 的實根為 $1,\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{3},\cdots\cdots,\dfrac{1}{n},-\dfrac{2}{n(n+1)}$

當 $x\neq 0$ 時，$x^2\cdot f(x)$ 為 $n+1$ 次實係數多項式

故 1，$\frac{1}{2}$，$\frac{1}{3}$，……，$\frac{1}{n}$，$-\frac{2}{n(n+1)}$ 為 $n+1$ 個相異實根無重根。

二、(1) $\frac{1}{2}\le \overline{CQ}\le 3\sqrt{2}$；(2) 4；$\frac{1}{2}$

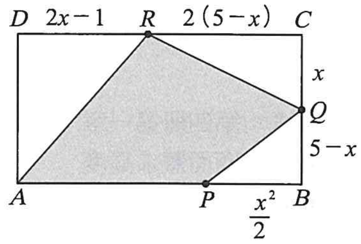
出處：選修數學甲(下)第二章〈多項式函數的微積分〉

目標：相似形(坐標、垂直向量、分點公式)與函數的極值

解析：(1)假設 $\overline{CQ}=x$，則 $\overline{BQ}=5-x$，$\overline{CR}=2(5-x)$，$\overline{BP}=\frac{x^2}{2}$，$\overline{DR}=2x-1$

因 $\begin{cases}0\le x\le 5\\ 0\le 2x-1\le 9\\ 0\le \frac{x^2}{2}\le 9\end{cases}$，可得 $\frac{1}{2}\le \overline{CQ}\le 3\sqrt{2}$。

(2)如右圖，令要扣除的三個三角形面積和 $\triangle BPQ+\triangle CRQ+\triangle ADR$ 為



$$f(x)=\frac{x^2(5-x)}{4}+x(5-x)+\frac{5(2x-1)}{2}=-\frac{x^3}{4}+\frac{x^2}{4}+10x-\frac{5}{2}$$

$$\Rightarrow f'(x)=-\frac{3x^2}{4}+\frac{x}{2}+10=-\frac{1}{4}(x-4)(3x+10)$$

x	$\frac{1}{2}$		4		$3\sqrt{2}$
$f'(x)$	+	+	0	−	−
$f(x)$	$f\left(\frac{1}{2}\right)$	↗	極大值	↘	$f\left(3\sqrt{2}\right)$

所以當 $x=4$ 時，面積有最小值 $\left(\text{面積的最小值為 } 45-f(4)=\frac{39}{2}\text{，可以不求出}\right)$。

因為 $f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{81}{32}<3$，$f\left(3\sqrt{2}\right)=\frac{33\sqrt{2}}{2}+2>3$

所以當 $x=\frac{1}{2}$ 時，面積有最大值 $\left(\text{面積的最大值為 } 45-f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1359}{32}\text{，可以不求出}\right)$。

非選擇題批改原則

一、(1) $a=-\frac{n(n+1)}{2}$，$b=-1$；(2) 1，$\frac{1}{2}$，$\frac{1}{3}$，……，$\frac{1}{n}$，$-\frac{2}{n(n+1)}$，所有實根皆相異無重根

出處：第一冊第二章〈多項式函數〉

目標：多項式方程式係數與根

解析：(1) $g(0)=-1\Rightarrow(-1)^n\times(-1)^n\times b=-1\Rightarrow b=-1$ (2 分)

$g'(0)=0\Rightarrow g(x)$ 的一次項係數為 0 (1 分)

所以 $((-1)+(-2)+\cdots\cdots+(-n))b+a=0\Rightarrow a=-\frac{n(n+1)}{2}$ (2 分)

故 $a=-\frac{n(n+1)}{2}$，$b=-1$。

(2) $f(x)=\frac{1}{x^2}\Rightarrow x^2\cdot f(x)=1\Rightarrow g(x)=0$ (1 分)

則滿足 $g(x)=0$ 的實根為 1，$\frac{1}{2}$，$\frac{1}{3}$，……，$\frac{1}{n}$ (1分)，$-\frac{2}{n(n+1)}$ (1 分)

當 $x\neq 0$ 時，$x^2\cdot f(x)$ 為 $n+1$ 次實係數多項式 (1 分)

故 1，$\frac{1}{2}$，$\frac{1}{3}$，……，$\frac{1}{n}$，$-\frac{2}{n(n+1)}$ 為 $n+1$ 個相異實根無重根。 (1 分)