全國公私立 107 學年度指定科目第 7 次聯合模擬考試數學甲


RA689

第壹部分：選擇題

一、單選題：(24 分)

1. 小理一家五個人坐在一張圓桌聊天用餐，用餐前玩了一個遊戲，在每個人面前都放一個完全相同的硬幣，所有人同時翻轉自己的硬幣，若硬幣正面朝上，則這個人要站起來；若正面朝下，則這個人可以繼續坐著。求玩一次遊戲，沒有相鄰的兩個人同時站起來的機率為何？

   (1) $\dfrac{5}{16}$　(2) $\dfrac{11}{32}$　(3) $\dfrac{15}{32}$　(4) $\dfrac{1}{2}$　(5) $\dfrac{2}{5}$

2. 複數 z_1，z_2，滿足 $|z_1|=|z_2|=1$，$z_1-z_2=\dfrac{2-4i}{2+i}$，則 $z_1\cdot z_2=$？

   (1) 0　(2) i　(3) $-i$　(4) 1　(5) -1

3. 已知函數 $y=f(x)$ 的圖形對稱於 y 軸，且當 $x>0$ 時，$f(x)=|\log_2 x|$。若 $a=f(-3)$，$b=f(\frac{1}{4})$，$c=f(2)$，則 a，b，c 的大小關係為何？

   (1) $a>b>c$　(2) $b>a>c$　(3) $b>c>a$　(4) $c>a>b$　(5) $c>b>a$

4. 已知點 $P(x, y)$是直線 $kx+y+4=0(k>0)$ 上一動點，$\overleftrightarrow{PA}$，$\overleftrightarrow{PB}$ 是圓 $x^2+y^2-2y=0$ 的兩條切線，A，B 是兩切點，O 為圓心。若四邊形 $PAOB$ 的最小面積為 2，求 k 的值為何？

   (1) 2　(2) $\sqrt{5}$　(3) $2\sqrt{2}$　(4) 3　(5) $\dfrac{\sqrt{21}}{2}$

二、多選題：(24 分)

5. 關於平面 $E: x+y-z=1$，直線：$L_1: \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+1}{3}=\dfrac{z-2}{-1}$，$L_2: \dfrac{x-8}{-1}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z-8}{1}$，$L_3: \dfrac{x-2}{-1}=\dfrac{y-4}{2}=\dfrac{z-2}{1}$，下列敘述哪些正確？

   (1) L_1、L_2 為相交兩直線　(2) 直線 L_2 平行平面 E
   (3) 若一平面 E_1 包含直線 L_1 與 L_3，則(5, 1, 7)為平面 E_1 的一個法向量
   (4) 若一平面 E_2 包含直線 L_2 且平行 L_1，則平面 E_2 必平行選項(3)中的平面 E_1
   (5) 若點 P 在直線 L_1 上，且點 Q 在直線 L_2 上，則 $\overline{PQ}$ 的最短距離為 $5\sqrt{3}$

6. 設 $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0$ 為 n 次實係數多項式，則下列敘述哪些正確？

   (1) 若 $\dfrac{h}{m}$ 為方程式 $f(x)=0$ 的有理根，則 m 是 a_n 的因數，h 是 a_0 的因數
   (2) 若 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)}{x^3-1}$ 存在，則 $x-1$ 為 $f(x)$的因式
   (3) 若 $n=5$，則 $f(x)$的圖形最多有 3 個反曲點　(4) 若 $n=7$，則 $f(x)$至少有一個極值點
   (5) 若 $f(x)$為嚴格遞增函數，則 $f'(x)=0$ 沒有實根

7. 在坐標平面上，考慮二階方陣 $A=\dfrac{1}{5}\begin{bmatrix}3 & -4\\ 4 & 3\end{bmatrix}$ 所定義的線性變換。對於平面上異於原點 O 的點 P_1，設 P_1 經 A 變換成 P_2，P_2 經 A 變換成 P_3。令 $\overline{OP_1}=k$，試問下列哪些敘述是正確的？

   (1) $\sin(\angle P_1OP_3)=\dfrac{24}{25}$　(2) △$P_1P_2P_3$ 的面積為 $\dfrac{8}{25}k^2$　(3) $\overline{P_1P_3}=\dfrac{6}{5}k$
   (4) 假設 P_1 是圖形 $y=\dfrac{1}{5}x^2-5$ 上的動點，則△$P_1P_2P_3$ 面積的最小可能值為 6
   (5) 承(4)，當△$P_1P_2P_3$ 面積最小時的 $P_1=(\dfrac{5}{\sqrt{2}},-\dfrac{5}{2})$

三、選填題：(28 分)

A. 在$\triangle ABC$中，D為$\overline{AC}$上的一點，$\overline{BC}=2\sqrt{2}$，$\angle DBC=45^\circ$，若$\angle C$為銳角，$\overline{AB}=6\sqrt{2}$，$\sin A=\dfrac{1}{\sqrt{10}}$，求$\overline{CD}=$________。

B. 已知a, b為實數，函數$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^{2n+1}+ax^2+bx-3}{x^{2n}-5}$，若對所有的實數$x$滿足$|x|\le 1$，且$f(x)$為連續函數，試求數對$(a, b)$的值為____________。

C. 某商店舉行滿額抽獎促銷活動，顧客購買金額滿 1000 元，可根據下列方案甲抽獎一次，或顧客購買滿 1500 元，可根據方案乙抽獎一次，(例如：某顧客購買商品為 2600 元，則有三種抽獎方式可以選擇，分別為：根據方案甲抽兩次，或根據方案乙抽一次，或選方案甲乙各一次)。又抽獎的兩方案分別為：

方案甲：從裝有 2 個紅球，3 個白球(僅顏色不同)的袋中隨機抽出 2 球，若都是紅球，可得獎金 300 元，否則沒有獎金。兌獎後，球要放回甲袋中。

方案乙：從裝有 3 個紅球，2 個白球(僅顏色不同)的袋中隨機抽出 2 球，若都是紅球，可得獎金 150 元， 否則沒有獎金。兌獎後，球要放回乙袋中。

若張太太到此商店購買商品金額為 3500 元，試問她抽獎所得獎金的期望值最多是___________元。

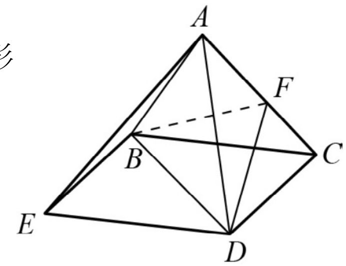
D. 已知$\overrightarrow{a}$，$\overrightarrow{b}$為兩非零向量，且$|\overrightarrow{a}|=2$，$|\overrightarrow{a}+2\overrightarrow{b}|=2$，則$|2\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}|+|\overrightarrow{b}|$的最大值為____________。

第貳部分：非選擇題(24 分)

一、如圖(1)，四角錐 $A-BCDE$ 中，$\overline{AE}=4$，$\overline{AB}=2$，$\triangle ABC$ 是正三角形，四邊形 $BCDE$ 是矩形，若平面 ABC 與平面 $BCDE$ 互相垂直。

(1) 當 $\overline{AE}$ 平行平面 BFD 時，求平面 $BCDE$ 與平面 BFD 的兩面角為 θ，求 $\sin\theta=$？ (5 分)

(2) 若 F 為 $\overline{AC}$ 上一點，試問當 $\overline{AE}$ 平行平面 BFD 時，$\overline{AF}$ 的長度為何？ (5 分)



圖(1)

二、已知兩拋物線 $T_1: y=x(x-2)$，$T_2: y=-x(x-6)$，則：

(1) 設 p 為拋物線外一點，已知過 p 且與 T_1 相切之二直線斜率分別為 -2 與 4，求 p 點坐標為何？ (4 分)

(2) 設兩拋物線 T_1，T_2 所圍成之區域為 Ω，試求 Ω 的面積為何？ (5 分)

(3) 承(2)，若 $y=kx$ 將 Ω 分成面積相等的兩塊區域，試求 k 的值為何？ (5 分)

RA689　全國公私立 **107** 學年度指定科目第 **7** 次聯合模擬考試數學甲

選擇題：1. (2)　2. (4)　3. (2)　4. (1)　5. (4)(5)　6. (2)(3)　7. (1)(2)(4)

選填題：A. $\sqrt{5}$　B. $(3,-5)$　C. 105　D. $\frac{8}{\sqrt{3}}$

非選擇題：一、(1) $\frac{2}{\sqrt{13}}$　(2) 1

二、(1) $(\frac{3}{2},-3)$　(2) $\frac{64}{3}$　(3) 2