臺北區高中 107 學年度第二學期指定科目第二次模擬考數學甲

RA690

第壹部分：選擇題

一、單選題：(18 分)

1. 已知實係數函數 $f(x)$的圖形是由實係數函數 $g(x)=\cos x$ 的圖形經以下步驟變換得到：
   一、先將 $g(x)$圖形上所有點的縱坐標伸長為原來的 3 倍(橫坐標不變)；
   二、將所得到的圖形向右平移 $\frac{\pi}{2}$ 單位長。
   若 $0\le x\le 2\pi$ 且最小值 $m\le f(x)+g(x)\le$ 最大值 M，求 $M-m=$ ？
   (1) $\frac{\sqrt{10}}{2}$　(2) $\sqrt{10}$　(3) $\frac{3}{2}\sqrt{10}$　(4) $2\sqrt{10}$　(5) $3\sqrt{10}$

2. 設實係數函數 $f(x)=x^3+(a-1)x^2+ax$，若 $f(x)=-f(-x)$，則 $f(x)$在原點的切線方程式為下列何者？ (1) $y=\frac{1}{3}x$　(2) $y=-\frac{1}{3}x$　(3) $y=\frac{1}{\sqrt{3}}x$　(4) $y=-\frac{1}{\sqrt{3}}x$　(5) $y=x$

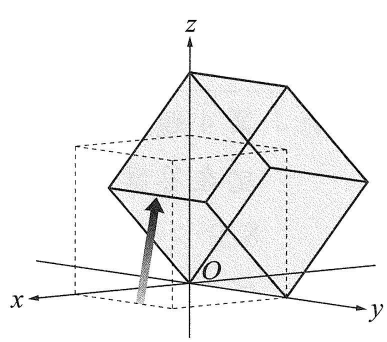
3. 已知集合 $A=\{z\mid |z-2|\le|z|\le 2\}$，試求集合 A 在複數平面上所形成的圖形面積為何？
   (1) $\frac{2}{3}\pi+\sqrt{3}$　(2) $\frac{4}{3}\pi$　(3) $\frac{8}{3}\pi$　(4) $\frac{4}{3}\pi-\sqrt{3}$　(5) $\frac{8}{3}-2\sqrt{3}$

二、多選題：(40 分)

4. 甲、乙兩人進行象棋比賽，約定先勝 3 局者獲得比賽的勝利，比賽即結束。除了第五局甲獲勝的機率為 $\frac{2}{3}$ 外，其餘每局比賽甲獲勝的機率都是 $\frac{1}{2}$。假設各局比賽結果互相獨立，則下列選項哪些正確？
   (1) 甲以 3：0 獲勝的機率為 $\frac{1}{8}$　(2) 甲以 3：1 獲勝的機率為 $\frac{1}{16}$　(3) 甲以 3：2 獲勝的機率為 $\frac{1}{4}$
   (4) 甲以 3：0 獲勝的機率 $>$ 甲以 3：1 獲勝的機率 $>$ 甲以 3：2 獲的機率
   (5) 若比賽結果為 3：0 或 3：1，則勝方得 3 分，輸方得 0 分；若比賽結果為 3：2，則勝方得 2 分，輸方得 1 分，則甲獲勝時得分的期望值為 $\frac{23}{16}$ 分

5. 若 $<a_n>$，$<b_n>$ 為二數列，則下列敘述何者正確？
   (1) 若 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n+b_n)$ 存在，則 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n+b_n)=\lim\limits_{n\to\infty}a_n+\lim\limits_{n\to\infty}b_n$　(2) 若 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$，則無窮級數 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收斂
   (3) 若 $<b_n>=\left\langle\frac{\pi}{5}\right\rangle^n$，則無窮級數 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 收斂　(4) 若 $<a_n>$ 收斂到 0，則數列 $<a_n{}^2>$ 亦收斂到 0
   (5) 若 $\lim\limits_{n\to\infty}|b_n|=0$，則 $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=0$

6. 如右圖在空間中有一個邊長為 1 的正立方體，它的長寬高分別在 x 軸、y 軸以及 z 軸上，若將此正立方體如右圖往 x 軸負向翻轉 45 度，產生新坐標系 x' 軸、y' 軸以及 z' 軸，則下列敘述何者正確？
   (1) 原坐標系中 z 軸變為新坐標系中的 $x'-z'=0$
   (2) 原坐標系中點(0, 1, 0)仍然還是新坐標系中的點(0, 1, 0)
   (3) 原坐標系中點(0, 0, 1)變為新坐標系中的點(1, 0, 1)
   (4) 原坐標系中 xy 平面變為新坐標系中 $x'+z'=0$
   (5) 原坐標系中 yz 平面而變為新坐標系中 $x'-z'=0$



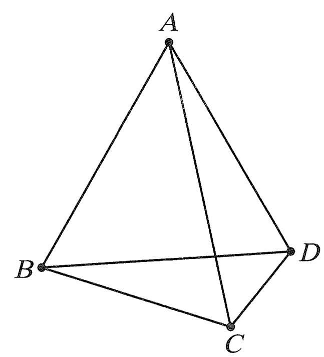
7. 若在坐標平面上繪製直線 $y=12x+a$ 與 $y=x^3$ 的圖形，則下列選項何者正確？
(1) 當 $a=-25$ 時，兩圖形恰有 1 個交點　(2) 當 $a=-3$ 時，兩圖形恰有 4 個交點
(3) 當 $a=0$ 時，兩圖形恰有 3 個交點　(4) 當 $a=16$ 時，兩圖形恰有 2 個交點
(5) 當 $a=25$ 時，兩圖形恰有 2 個交點

8. x，y 為正整數且 $x<y$，$\log x$ 的首數是 m，尾數是 a，$\log y$ 的首數是 n，尾數是 b，已知 $m^2+n^2=5$，$a+b=1$，則 x 可能之值為何？
(1) 10　(2) 25　(3) 32　(4) 40　(5) 80

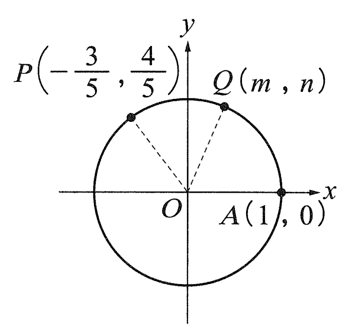
三、選填題：(18 分)

A. 已知三次實係數函數 $f(x)$ 滿足 $f(0)=f(1)=0$，$f(3)>0$，且 $f(x)$ 的圖形與 x 軸所圍成區域的面積為 $\dfrac{1}{16}$，則 $f(2)=$________。

B. 空間坐標中，如右圖，一四面體 $ABCD$(此為示意圖)，其頂點坐標為 $A(-1,3,3)$、$B(1,3,4)$、$C(3,-5,-5)$、$D(2,2,7)$，則四面體 $ABCD$ 中，以 ABC 為底面時，高為________。



C. 如右圖，已知 $A(1,0)$，$Q(m,n)$，$P(\frac{-3}{5},\frac{4}{5})$ 均在單位圓上，$\angle QOP=60^\circ$，試求點 Q 的 x 坐標 $m=$__________。
(化為最簡分數)



第貳部分：非選擇題(24 分)

一、某工廠的某產品裝箱包裝，每箱 200 件，每箱產品交貨前都會先進行檢驗，若檢驗為不合格品就會更換成合格品。檢驗時先從這箱產品中任取 20 件檢驗，再根據檢驗結果決定是否對剩下的所有產品做檢驗。設每件產品不合格機率均為 $p(0<p<1)$且各項產品是否為不合格互相獨立，試求：

(1) 若抽驗的 20 件產品中恰有 2 件為不合格品的機率為 $f(p)$，則當 $p=p_0$ 時，$f(p)$有最大值時，p_0 的值為何？(6 分)

(2) 承(1)，現對一箱產品抽檢 20 件後發現恰有 2 件為不合格品且以 p_0 為 p 的值。已知每件產品的檢驗費用為 2 元，若有不合格品進人客戶手中，則每件產品要賠償客戶 25 元。若不對剩下的產品做檢驗，將這一箱產品的檢驗費用和賠償費用的和記為機變數 X，試求期望值 $E(X)$。(4 分)

(3)承(2)，若以機變數 X 的期望值為決策依據，是否該對剩下的產品做檢驗？(2 分)

二、1973 年研發出原型手機 DynaTAC，據說當時在民間有一群設計師設計出一隻長方體原型機，開始設計成形時只有底面邊長為 $9cm$ 的正方形，設計師規劃正方形邊長每減少 $x\ cm$，$x>0$，高(從 0 公分開始增加)就增加 $2x\ cm$，設計師希望能有最大體積放入最多的零件，則：

(1) 設計出來的手機，正方形邊長與高分別為幾公分。(10 分)

(2) 手機體積最大為多少立方公分。(2 分)

RA690　臺北區高中 **107** 學年度第二學期指定科目第二次模擬考數學甲

選擇題：1. (4)　2. (5)　3. (4)　4. (1)(3)(5)　5. (3)(4)(5)　6. (2)(4)(5)　7. (1)(3)(4)　8. (2)(4)(5)

選填題：A. 6　B. $\sqrt{5}$　C. $\dfrac{-3+4\sqrt{3}}{10}$

非選擇題：一、(1) $\dfrac{1}{10}$　(2) 490(元)　(3) 要檢驗

二、(1) 正方形的邊長為 6 公分，高為 6 公分

(2) 手機體積最大為 216 立方公分