數學考科詳解

題號	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	
答案	(4)	(5)	(4)	(1)(3)(5)	(3)(4)(5)	(2)(4)(5)	(1)(3)(4)	(2)(4)(5)	

第壹部分：選擇題

一、單選題

1. (4)

難易度：中

出處：選修數學甲(上)第二章〈三角函數〉

目標：三角函數疊合的性質

解析：由題意可推得$f(x)=3\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)=3\sin x$

$\therefore f(x)+g(x)=3\sin x+\cos x=\cos x+3\sin x$

$=\sqrt{10}\left(\frac{1}{\sqrt{10}}\cos x+\frac{3}{\sqrt{10}}\sin x\right)=\sqrt{10}\sin(x+\theta)\left(\sin\theta=\frac{1}{\sqrt{10}}，\cos\theta=\frac{3}{\sqrt{10}}\right)$

$\because -1\leq\sin(x+\theta)\leq 1\Rightarrow -\sqrt{10}\leq\sqrt{10}\sin(x+\theta)\leq\sqrt{10}$

$\therefore -\sqrt{10}\leq f(x)+g(x)\leq\sqrt{10}\Rightarrow M=\sqrt{10}$，$m=-\sqrt{10}\Rightarrow M-m=\sqrt{10}-(-\sqrt{10})=2\sqrt{10}$

故選(4)。

2. (5)

難易度：易

出處：選修數學甲(下)第二章〈多項式函數的微積分〉

目標：導函數的理解

解析：$\because f(x)=0$ 為奇函數　$\therefore a-1=0\Rightarrow a=1\Rightarrow f(x)=x^3+x$

$\therefore f'(x)=3x^2+1$，$f'(0)=1$，又$f(x)=0$ 過原點　$\therefore$所求切線方程式為 $y=x$

故選(5)。

3. (4)

難易度：易

出處：選修數學甲(上)第二章〈三角函數〉、第三冊第二章〈直線與圓〉

目標：熟悉複數平面及線性規劃

解析：令 $z=x+yi$，x、$y\in R$

$|z|\leq 2\Rightarrow\sqrt{x^2+y^2}\leq 2\Rightarrow x^2+y^2\leq 4$

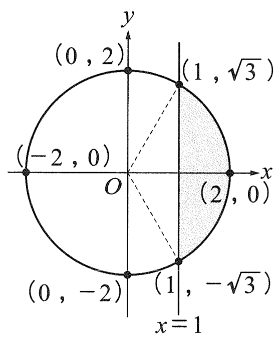
$\Rightarrow$其圖形為以 O 為圓心，半徑為 2 的圓及其內部

$|z-2|\leq|z|\Rightarrow\sqrt{(x-2)^2+y^2}\leq\sqrt{x^2+y^2}\Rightarrow x^2-4x+4+y^2\leq x^2+y^2\Rightarrow x\geq 1$

交集圖形如右圖陰影部分

所求面積為$\frac{1}{3}\cdot\pi\cdot 2^2-\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 2\cdot\sin 120^\circ=\frac{4\pi}{3}-\sqrt{3}$

故選(4)。



二、多選題

4. (1)(3)(5)

難易度：易

出處：第二冊第三章〈機率〉、選修數學甲(上)第一章〈機率統計〉

目標：二項分布、期望值的應用

解析：設隨機變數 X 表示甲進行的比賽局數，則 X 可能的值為 3，4，5

設 $P(X)$ 表示甲比賽 X 局獲勝的機率

(1) ○：$P(3)=C^3_3\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{8}$

(2) ×：＿ ＿ ＿甲

$P(4)=C^3_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{1}{2}=\frac{3}{16}$

(3) ○：＿ ＿ ＿ ＿ ＿甲

$P(5)=C_2^4\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot\frac{2}{3}=\frac{6}{24}=\frac{1}{4}$

(4) ╳：$\frac{1}{8}<\frac{3}{16}<\frac{1}{4}$

即甲以 3：0 獲勝的機率＜甲以 3：1 獲勝的機率＜甲以 3：2 獲勝的機率

(5) ○：

甲獲勝時的得分	3	3	2
機率	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{1}{4}$

甲獲勝時得分的期望值為 $E(X)=3\times\frac{1}{8}+3\times\frac{3}{16}+2\times\frac{1}{4}=\frac{3}{8}+\frac{9}{16}+\frac{1}{2}=\frac{23}{16}$ 分

故選(1)(3)(5)。

5. (3)(4)(5)

難易度：中

出處：選修數學甲(下)第一章〈極限與函數〉

目標：無窮數列的收斂與發散

解析：(1) ╳：設 $a_n=n$，$b_n=1-n$，則 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n+b_n)=1$，但 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$，$\lim\limits_{n\to\infty}b_n$ 不存在

(2) ╳：設 $a_n=\frac{1}{n}$，則 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$，但 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 發散

(3) ○：$\because -1<\frac{\pi}{5}<1$ $\quad\therefore \sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 收斂

(4) ○：當 n 足夠大時，則 $-1<a_n<1\Rightarrow -1<0<a_n^{\,2}<1$，且 $a_n^{\,2}<|a_n|$

又 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0\Rightarrow\lim\limits_{n\to\infty}|a_n|=0\Rightarrow\lim\limits_{n\to\infty}a_n^{\,2}=0$

(5) ○：設 $c_n=|b_n|$，$d_n=-|b_n|=-c_n$，則 $d_n\leq b_n\leq c_n$，又 $\lim\limits_{n\to\infty}|b_n|=0$

$\Rightarrow\lim\limits_{n\to\infty}c_n=0$，$\lim\limits_{n\to\infty}d_n=\lim\limits_{n\to\infty}(-c_n)=0$，由夾擠定理可得 $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=0$

故選(3)(4)(5)。

6. (2)(4)(5)

難易度：中

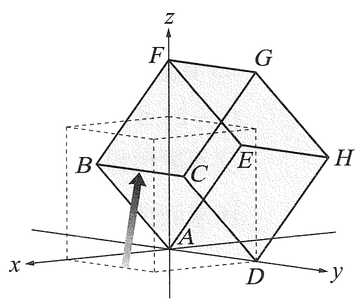
出處：第四冊第一章〈空間向量〉、第四冊第二章〈空間中的平面與直線〉

目標：了解空間坐標與直線平面的應用

解析：令在新坐標系中正立方體的八個頂點分別為

$A(0,0,0)$，$B(1,0,0)$，$C(1,1,0)$，$D(0,1,0)$

$E(0,0,1)$，$F(1,0,1)$，$G(1,1,1)$，$H(0,1,1)$



(1) ╳：原坐標系中 z 軸為新坐標中 $\overleftrightarrow{AF}$，即 $\begin{cases}x'=t\\y'=0\\z'=t\end{cases}$，$t\in R$

(2) ○：原坐標系中 y 軸仍為 $\overleftrightarrow{AD}$，即 y' 軸，因此仍為 $(0,1,0)$

(3) ╳：原坐標系中 $(0,0,1)$ 在 z 軸上距 A 點 1

故承(1)，$\sqrt{t^2+0^2+t^2}=1\Rightarrow t=\frac{1}{\sqrt{2}}$

因此為新坐標系中 $\left(\frac{1}{\sqrt{2}},0,\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

(4) ○：原坐標系中 xy 平面法向量為 $(0,0,1)$，

承(3)，在新坐標系中的法向量為 $\left(\frac{1}{\sqrt{2}},0,\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$，即 $\frac{x'}{\sqrt{2}}+\frac{z'}{\sqrt{2}}=0\Rightarrow x'+z'=0$

(5) ○：同(4)，原坐標系中 yz 平面法向量 $(1,0,0)$

在新坐標系中為 $\left(\frac{1}{\sqrt{2}},0,-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$，即 $\frac{x'}{\sqrt{2}}-\frac{z'}{\sqrt{2}}=0\Rightarrow x'-z'=0$

故選(2)(4)(5)。

7. (1)(3)(4)

難易度：易

出處：選修數學甲(下)第二章〈多項式函數的微積分〉

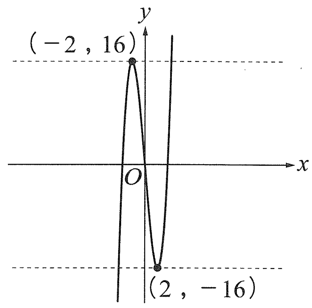
目標：三次多項式函數的圖形

解析：$12x+a=x^3 \Rightarrow x^3-12x=a$

令 $f(x)=x^3-12x$

$\because f'(x)=3x^2-12=3(x+2)(x-2)$，且 $f''(x)=6x$

作圖如右



$f(0)=0$，$f(2)=16$，$f(-2)=16$

$\therefore a>16$ 或 $a<-16$ 時，有 1 個交點

$a=16$，-16 時，有 2 個交點

$-16<a<16$ 時，有 3 個交點

故選(1)(3)(4)。

8. (2)(4)(5)

難易度：中

出處：第一冊第三章〈指數、對數函數〉

目標：了解首尾數的意義及對數的運算

解析：$\log x=m+a$，$\log y=n+b$，$x<y \Rightarrow m \leq n$

$\because m^2+n^2=5 \quad \therefore m=1$，$n=2$

$a+b=1$，$0<a<1$，$0<b<1$

$\log x=m+a=1.\cdots\cdots \Rightarrow 10<x<100$

$\log xy=\log x+\log y=m+a+n+b=1+2+1=4$

$\therefore xy=10^4=2^4\cdot 5^4$，又 $10<x<100$

$\therefore x=16$，20，25，40，50，80

故選(2)(4)(5)。

三、選填題

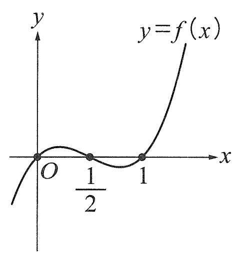
A. 6

難易度：中

出處：選修數學甲(下)第二章〈多項式函數的微積分〉

目標：多項式與積分的綜合問題

解析：$\because f(0)=f\left(\frac{1}{2}\right)=f(1)=0$，$f(3)>0$，作略圖如右



設 $f(x)=ax(2x-1)(x-1)$

$=a(2x^3-3x^2+x)$

$$\Rightarrow \int_0^{\frac{1}{2}} a(2x^3-3x^2+x)dx-\int_{\frac{1}{2}}^{1} a(2x^3-3x^2+x)dx=\frac{1}{16}$$

$$\Rightarrow a\left(\frac{1}{2}x^4-x^3+\frac{1}{2}x^2\right)\Bigg|_0^{\frac{1}{2}}-a\left(\frac{1}{2}x^4-x^3+\frac{1}{2}x^2\right)\Bigg|_{\frac{1}{2}}^{1}=\frac{1}{16}$$

$$\Rightarrow a\left(\frac{1}{32}-\frac{1}{8}+\frac{1}{8}-0-\left(\frac{1}{2}-1+\frac{1}{2}-\left(\frac{1}{32}-\frac{1}{8}+\frac{1}{8}\right)\right)\right)=\frac{1}{16}$$

$$\Rightarrow a\left(\frac{1}{32}-0-\left(0-\frac{1}{32}\right)\right)=\frac{1}{16}$$

$\Rightarrow a=1$

$\Rightarrow f(x)=2x^3-3x^2+x$

故 $f(2)=16-12+2=6$。

B. $\sqrt{5}$

難易度：易

出處：第四冊第二章〈空間中的平面與直線〉

目標：平面方程式與距離公式的應用

解析：$A(-1,3,3)$

$B(1,3,4)$

$C(3,-5,-5)$

$D(2,2,7)$

四面體 $ABCD$ 中，

則以 ABC 為底，所求的高為點 D 到 A，B，C 所在平面的距離

先找出 A，B，C 所在的平面 E

$\overrightarrow{AB}=(1-(-1),3-3,4-3)=(2,0,1)$

$\overrightarrow{AC}=(3-(-1),-5-3,-5-3)=(4,-8,-8)$

$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=(8,20,-16)=4(2,5,-4)$

$\therefore$取法向量 $\overrightarrow{n}=(2,5,-4)$

設 A，B，C 三點所在平面 E 為 $2x+5y-4z+k=0$

將 $A(-1,3,3)$ 代入 $\Rightarrow 2\cdot(-1)+5\cdot3-4\cdot3+k=0$

$\Rightarrow k=-1$

$\therefore$平面 E 為 $2x+5y-4z-1=0$

$d(D,E)=\dfrac{|2\times2+5\times2-4\times7-1|}{\sqrt{2^2+5^2+(-4)^2}}=\dfrac{|-15|}{\sqrt{45}}=\dfrac{15}{3\sqrt{5}}=\sqrt{5}$ 。

C. $\dfrac{-3+4\sqrt{3}}{10}$

難易度：中

出處：第四冊第三章〈矩陣〉

目標：旋轉矩陣

解析：將 P 點以圓心順時針旋轉 60° 可得 $Q(m,n)$

$$\Rightarrow\begin{bmatrix}\cos(-60^{\circ}) & -\sin(-60^{\circ})\\ \sin(-60^{\circ}) & \cos(-60^{\circ})\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-\frac{3}{5}\\ \frac{4}{5}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}m\\ n\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2}\\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-\frac{3}{5}\\ \frac{4}{5}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}m\\ n\end{bmatrix}$$

$m=\dfrac{1}{2}\times\left(-\dfrac{3}{5}\right)+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\times\dfrac{4}{5}=\dfrac{-3+4\sqrt{3}}{10}$ 。

第貳部分：非選擇題

一、(1) $\dfrac{1}{10}$ ；(2) 490 (元)；(3)要檢驗

難易度：中

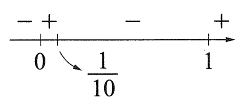
出處：選修數學甲(上)第一章〈機率統計〉、選修數學甲(下)第二章〈多項式函數的微積分〉

目標：了解機率分布及期望值的使用

解析：(1) $f(p)=C_2^{20}p^2(1-p)^{18}$

$\therefore f'(p)=C_2^{20}(p^2\cdot(-18(1-p)^{17})+2p(1-p)^{18})=C_2^{20}\cdot2p\cdot(1-p)^{17}(1-10p)$

令 $f'(p)=0\Rightarrow p=0$，1，$\dfrac{1}{10}$



故當 $p_0=\dfrac{1}{10}$ 時有最大值。

(2)令 y 表示剩下產品中不合格件數

$y\sim B(180,0.1)$

$E(y)=180\times0.1=18$

又 $X=20\times2+25y$

$E(X)=40+25E(y)=490$ (元)。

(3)全部檢驗的費用為 $200\times2=400<E(X)$ $\therefore$要檢驗。

二、⑴正方形的邊長為 6 公分，高為 6 公分；⑵手機體積最大為 216 立方公分

難易度：易

出處：選修數學甲(下)第二章〈多項式函數的微積分〉

目標：微積分在生活中的應用

解析：⑴設邊長減少 x 公分，高增加 $2x$ 公分，$0<x<9$

體積為 $(9-x)\times(9-x)\times 2x=2x^3-36x^2+162x$

令 $f(x)=2x^3-36x^2+162x$

則 $f'(x)=6x^2-72x+162$

$=6(x^2-12x+27)$

$=6(x-9)(x-3)$

$f'(x)=0$，$x=9$ 或 3

取 $x=3$，底面正方形邊長為 6 公分，高為 6 公分。

⑵最大體積為 $6\times6\times6=216$ 立方公分。

非選擇題批改原則

一、⑴$\dfrac{1}{10}$；⑵ 490；⑶要檢驗

難易度：中

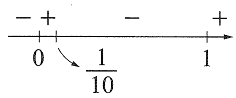
出處：選修數學甲(上)第一章〈機率統計〉、選修數學甲(下)第二章〈多項式函數的微積分〉

目標：了解機率分布及期望值的使用

解析：⑴ $f(p)=C_2^{20}p^2(1-p)^{18}$　(2 分)

$\therefore f'(p)=C_2^{20}(p^2\cdot(-18(1-p)^{17})+2p(1-p)^{18})-C_2^{20}\cdot 2p\cdot(1-p)^{17}(1-10p)$　(2 分)

令 $f'(p)=0\Rightarrow p=0$，1，$\dfrac{1}{10}$



故當 $p_0=\dfrac{1}{10}$ 時有最大值　(2 分)

⑵令 y 表示剩下產品中不合格件數

$y\sim B(180\ ,\ 0.1)$

$E(y)=180\times0.1=18$　(2 分)

又 $X=20\times2+25y$

$E(X)=40+25E(y)=490$　(2 分)

⑶全部檢驗的費用為 $200\times2=400<E(X)$　∴要檢驗。　(2 分)

二、⑴正方形的邊長為 6 公分，高為 6 公分；⑵手機體積最大為 216 立方公分

難易度：易

出處：選修數學甲(下)第二章〈多項式函數的微積分〉

目標：微積分在生活中的應用

解析：⑴設邊長減少 x 公分，高增加 $2x$ 公分，$0<x<9$　(2 分)

體積為 $(9-x)\times(9-x)\times 2x=2x^3-36x^2+162x$　(2 分)

令 $f(x)=2x^3-36x^2+162x$

則 $f'(x)=6x^2-72x+162$　(2 分)

$=6(x^2-12x+27)$

$=6(x-9)(x-3)$

$f'(x)=0$，$x=9$ 或 3　(2 分)

取 $x=3$，底面正方形邊長為 6 公分，高為 6 公分。　(2 分)

⑵最大體積為 $6\times6\times6=216$ 立方公分。　(2 分)