

全國公立高中 108 學年度第六次模考-數學甲(南一版)

第壹部分：選擇題 (占 76 分)



一、單選題 (占 18 分)

1. 已知袋子裡有紅球與白球共 5 顆。由甲、乙、丙三人依序從袋中各抽取 1 顆球，抽取後不放回並記錄顏色，每顆球被取出的機會相等。若事件 A 表示三人取球後，甲和乙抽到相同顏色球的事件，且事件 $A = \{\text{紅紅白}, \text{紅紅紅}, \text{白白紅}\}$ ，而事件 B 表示三人取球後，丙抽到白球的事件，試求條件機率 $P(B|A) = ?$

- (1) $\frac{1}{4}$ (2) $\frac{1}{3}$ (3) $\frac{1}{2}$ (4) $\frac{3}{5}$ (5) $\frac{2}{3}$

2. 若滿足 $|x - \frac{1}{10}| < a$ 的整數解 x 恰有 5 個，則實數 a 的範圍為下列哪一個選項？

- (1) $\frac{11}{10} \leq a < \frac{19}{10}$ (2) $\frac{11}{10} < a \leq \frac{19}{10}$ (3) $\frac{21}{10} \leq a < \frac{29}{10}$ (4) $\frac{21}{10} < a \leq \frac{29}{10}$ (5) $2 < a \leq 3$

3. 已知空間中一直線 $L: \frac{x-1}{-1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z}{2}$ 與一點 $A(2, 3, -5)$ 。若平面 E 包含直線 L ，且 A 在平面 E 上的投影點為 H ， $\overline{AH} = \sqrt{2}$ ，則 H 到直線 L 的距離為何？

- (1) $\sqrt{2}$ (2) 4 (3) 5 (4) 7 (5) $\sqrt{57}$

二、多選題 (占 40 分)

4. 設 $A(1, 0), B(0, 1), C(1, 1)$ 為坐標平面上三點，經二階方陣 M 作線性變換後， A 被映射至 $A'(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$ 、 B 被映射至 $B'(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$ 、 C 被映射至 C' ，請選出正確的選項。

- (1) M 定義的線性變換是旋轉變換 (2) 二階方陣 M 的行列式值為 1

- (3) $M^8 = I$ ，其中 $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ (4) $M^2 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

- (5) $\triangle A'B'C'$ 面積為 $\triangle ABC$ 面積的 2 倍

5. 考慮函數 $f(x) = \sqrt{3} \cos x - \sin x + 2$ ，其中 $x \in R$ 。試選出正確的選項。

- (1) $f(x)$ 為奇函數 (2) 函數 $f(x)$ 的最小正週期為 2π (3) $f(x)$ 的最小值為 0

- (4) 當 $\frac{\pi}{6} \leq x \leq \frac{7\pi}{6}$ 時， $f(x)$ 的最大值為 4 (5) 當 $\tan x = \frac{-\sqrt{3}}{3}$ 時，則 $f(x)$ 有最大值

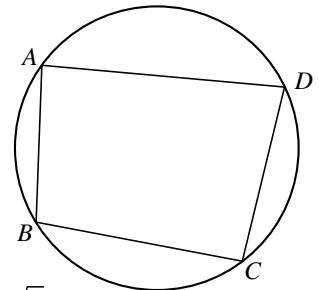
6. 如圖，已知 $ABCD$ 為圓內接四邊形，若 $\angle A = \angle C$ ， $B(0, 0)$ ， $D(4, 2)$ ，試選出正確的選項。

- (1) 圓心坐標為 $(2, 1)$ (2) 圓方程式為 $x^2 + y^2 - 4x - 2y = 0$

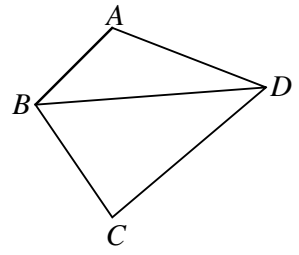
- (3) 直線 $2x - y + 6 = 0$ 與圓交於 2 點

- (4) 過點 $(3, 3)$ 且與圓相切的直線方程式為 $x + 2y - 9 = 0$

- (5) 若 A 點在第一象限，且 $\angle ABD = 60^\circ$ ，則 A 點坐標為 $(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2} + \sqrt{3})$



7. 如圖，已知四邊形 $ABCD$ 中， $\triangle BCD$ 面積為 $\triangle ABD$ 面積的 2 倍，且 $\angle DBC = 2\angle ABD$ ，若 $\overline{AB} = 3, \overline{BC} = 4, \overline{BD} = 6$ ，



- 試選出正確的選項。(1) $\cos \angle ABD = \frac{3}{4}$ (2) $\sin \angle DBC = \frac{3\sqrt{7}}{8}$
 (3) $\cos \angle ABC = -\frac{9}{16}$ (4) $\overline{AD} = 8$ (5) $\sin \angle BAD = \frac{\sqrt{14}}{4}$

8. 已知 $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + 3$ 為三次整係數多項式，若 $f(x)$ 的各項係數和為 4， $f(x)$ 除以 $(x+1)$ 的餘式為 2，試選出正確的選項。

- (1) $f(x) = 0$ 所有根的總和為 0 (2) $a+c=1$ (3) $f(2)$ 可能為 5
 (4) $f(x)$ 除以 x^2-1 的餘式為 $x+3$
 (5) 若 $f(\sqrt{3}) = 3 - \sqrt{3}$ ，則 $f(x) = 0$ 在 $\sqrt{3}$ 與 2 之間有實根

三、選填題 (占 18 分)

- A. 有一瓶濃度 50%，容量 1000 毫升的酒精水溶液，每次先用掉 200 毫升，再加入 200 毫升的水稀釋，則操作_____次後，可使濃度降到 10% 以下。($\log 2 \approx 0.3010$)

- B. 袋中有連續編號 1, 2, 3, ..., 6 號的球各一顆，每顆球被取到的機會均等，今隨機一次取出三顆球，令球號為 a, b, c 且 $a < b < c$ 若隨機變數 X 代表 a 的值，則 $E(X) =$ _____。(請化成最簡分數)

- C. 已知 $\vec{a} = (3, 4)$ ， $\vec{b} = (2, -1)$ ，若 \vec{c} 在 \vec{a} 上的正射影為 $(-\frac{6}{25}, -\frac{8}{25})$ ，則 $|\vec{b} - \vec{c}|$ 的最小值為_____。(請化成最簡分數)

第貳部分：非選擇題（占 24 分）

一、已知方程式 $z^6 = (-1+i)^8$ 的根可以表示為 $z_k = r(r \cos \theta_k + i \sin \theta_k)$ ， $r > 0, k = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ ，

若 $0 < \theta_1 < \theta_2 < \theta_3 < \theta_4 < \theta_5 < \theta_6 \leq 2\pi$ ，試求

(1) $(-1+i)^8 = a+bi$ ， a, b 為實數，則數對 $(a,b) = ?$ (4 分)

(2) $|z_1 - z_2|^3 = ?$ (4 分)

(3) $\frac{z_5 \times z_6}{z_3 \times z_4} = ?$ (4 分)

二、設對所有的自然數 n ， $a_n = \sqrt{1 \times 2} + \sqrt{2 \times 3} + \sqrt{3 \times 4} + \dots + \sqrt{n \times (n+1)}$ ，

(1) 證明對所有的自然數 n ，使得 $n < \sqrt{n \times (n+1)} < \frac{1}{2}(2n+1)$ 。(4 分)

(2) 證明對所有的自然數 n ，使得 $\frac{n(n+1)}{2} < a_n < \frac{n(n+2)}{2}$ 。(6 分)

(3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n^2} = ?$ (2 分)

RA692 全國公私立高中 108 學年度第六次模考-數學甲(南一版)

參考答案

選擇題：1. (3) 2. (4) 3. (2) 4. (1)(2)(3) 5. (2)(3) 6. (1)(2)(4)(5) 7. (1)(2)(3)(5)
8. (1)(2)(4)(5)

選填題：A. 8 B. $\frac{7}{4}$ C. $\frac{4}{5}$

非選擇題：一、(1) (16,0) (2) 4 (3) $-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$

二、(1) 略 (2) 略 (3) $\frac{1}{2}$