

# 全國公立高中 108 學年度第六次模考-數學甲(南一版)

第壹部分：選擇題 (占 76 分)



一、單選題 (占 18 分)

1. 已知袋子裡有紅球與白球共 5 顆。由甲、乙、丙三人依序從袋中各抽取 1 顆球，抽取後不放回並記錄顏色，每顆球被取出的機會相等。若事件  $A$  表示三人取球後，甲和乙抽到相同顏色球的事件，且事件  $A = \{\text{紅紅白}, \text{紅紅紅}, \text{白白紅}\}$ ，而事件  $B$  表示三人取球後，丙抽到白球的事件，試求條件機率  $P(B|A) = ?$

- (1)  $\frac{1}{4}$    (2)  $\frac{1}{3}$    (3)  $\frac{1}{2}$    (4)  $\frac{3}{5}$    (5)  $\frac{2}{3}$

2. 若滿足  $|x - \frac{1}{10}| < a$  的整數解  $x$  恰有 5 個，則實數  $a$  的範圍為下列哪一個選項？

- (1)  $\frac{11}{10} \leq a < \frac{19}{10}$    (2)  $\frac{11}{10} < a \leq \frac{19}{10}$    (3)  $\frac{21}{10} \leq a < \frac{29}{10}$    (4)  $\frac{21}{10} < a \leq \frac{29}{10}$    (5)  $2 < a \leq 3$

3. 已知空間中一直線  $L: \frac{x-1}{-1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z}{2}$  與一點  $A(2, 3, -5)$ 。若平面  $E$  包含直線  $L$ ，且  $A$  在平面  $E$  上的投影點為  $H$ ， $\overline{AH} = \sqrt{2}$ ，則  $H$  到直線  $L$  的距離為何？

- (1)  $\sqrt{2}$    (2) 4   (3) 5   (4) 7   (5)  $\sqrt{57}$

二、多選題 (占 40 分)

4. 設  $A(1, 0), B(0, 1), C(1, 1)$  為坐標平面上三點，經二階方陣  $M$  作線性變換後， $A$  被映射至  $A'(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$ 、 $B$  被映射至  $B'(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$ 、 $C$  被映射至  $C'$ ，請選出正確的選項。

- (1)  $M$  定義的線性變換是旋轉變換   (2) 二階方陣  $M$  的行列式值為 1

- (3)  $M^8 = I$ ，其中  $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$    (4)  $M^2 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

- (5)  $\triangle A'B'C'$  面積為  $\triangle ABC$  面積的 2 倍

5. 考慮函數  $f(x) = \sqrt{3} \cos x - \sin x + 2$ ，其中  $x \in R$ 。試選出正確的選項。

- (1)  $f(x)$  為奇函數   (2) 函數  $f(x)$  的最小正週期為  $2\pi$    (3)  $f(x)$  的最小值為 0

- (4) 當  $\frac{\pi}{6} \leq x \leq \frac{7\pi}{6}$  時， $f(x)$  的最大值為 4   (5) 當  $\tan x = \frac{-\sqrt{3}}{3}$  時，則  $f(x)$  有最大值

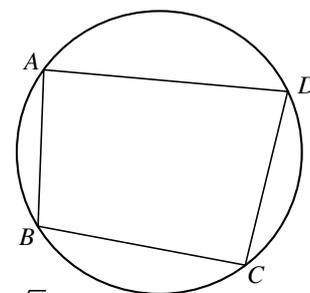
6. 如圖，已知  $ABCD$  為圓內接四邊形，若  $\angle A = \angle C$ ， $B(0, 0)$ ， $D(4, 2)$ ，試選出正確的選項。

- (1) 圓心坐標為  $(2, 1)$    (2) 圓方程式為  $x^2 + y^2 - 4x - 2y = 0$

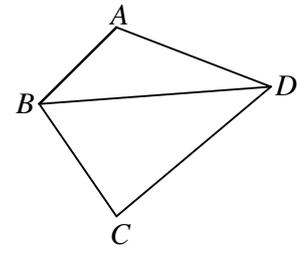
- (3) 直線  $2x - y + 6 = 0$  與圓交於 2 點

- (4) 過點  $(3, 3)$  且與圓相切的直線方程式為  $x + 2y - 9 = 0$

- (5) 若  $A$  點在第一象限，且  $\angle ABD = 60^\circ$ ，則  $A$  點坐標為  $(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2} + \sqrt{3})$



7. 如圖，已知四邊形  $ABCD$  中， $\triangle BCD$  面積為  $\triangle ABD$  面積的 2 倍，且  $\angle DBC = 2\angle ABD$ ，若  $\overline{AB} = 3, \overline{BC} = 4, \overline{BD} = 6$ ，



- 試選出正確的選項。(1)  $\cos \angle ABD = \frac{3}{4}$  (2)  $\sin \angle DBC = \frac{3\sqrt{7}}{8}$   
 (3)  $\cos \angle ABC = -\frac{9}{16}$  (4)  $\overline{AD} = 8$  (5)  $\sin \angle BAD = \frac{\sqrt{14}}{4}$

8. 已知  $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + 3$  為三次整係數多項式，若  $f(x)$  的各項係數和為 4， $f(x)$  除以  $(x+1)$  的餘式為 2，試選出正確的選項。

- (1)  $f(x) = 0$  所有根的總和為 0 (2)  $a+c=1$  (3)  $f(2)$  可能為 5  
 (4)  $f(x)$  除以  $x^2-1$  的餘式為  $x+3$   
 (5) 若  $f(\sqrt{3}) = 3 - \sqrt{3}$ ，則  $f(x) = 0$  在  $\sqrt{3}$  與 2 之間有實根

### 三、選填題 (占 18 分)

- A. 有一瓶濃度 50%，容量 1000 毫升的酒精水溶液，每次先用掉 200 毫升，再加入 200 毫升的水稀釋，則操作\_\_\_\_\_次後，可使濃度降到 10% 以下。(  $\log 2 \approx 0.3010$  )

- B. 袋中有連續編號 1, 2, 3, ..., 6 號的球各一顆，每顆球被取到的機會均等，今隨機一次取出三顆球，令球號為  $a, b, c$  且  $a < b < c$  若隨機變數  $X$  代表  $a$  的值，則  $E(X) =$ \_\_\_\_\_。(請化成最簡分數)

- C. 已知  $\vec{a} = (3, 4)$ ， $\vec{b} = (2, -1)$ ，若  $\vec{c}$  在  $\vec{a}$  上的正射影為  $(-\frac{6}{25}, -\frac{8}{25})$ ，則  $|\vec{b} - \vec{c}|$  的最小值為\_\_\_\_\_。(請化成最簡分數)

第貳部分：非選擇題（占 24 分）

一、已知方程式  $z^6 = (-1+i)^8$  的根可以表示為  $z_k = r(r \cos \theta_k + i \sin \theta_k)$ ， $r > 0, k = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ ，若  $0 < \theta_1 < \theta_2 < \theta_3 < \theta_4 < \theta_5 < \theta_6 \leq 2\pi$ ，試求

(1)  $(-1+i)^8 = a+bi$ ， $a, b$  為實數，則數對  $(a,b) = ?$  (4 分)

(2)  $|z_1 - z_2|^3 = ?$  (4 分)

(3)  $\frac{z_5 \times z_6}{z_3 \times z_4} = ?$  (4 分)

二、設對所有的自然數  $n$ ， $a_n = \sqrt{1 \times 2} + \sqrt{2 \times 3} + \sqrt{3 \times 4} + \dots + \sqrt{n \times (n+1)}$ ，

(1) 證明對所有的自然數  $n$ ，使得  $n < \sqrt{n \times (n+1)} < \frac{1}{2}(2n+1)$ 。(4 分)

(2) 證明對所有的自然數  $n$ ，使得  $\frac{n(n+1)}{2} < a_n < \frac{n(n+2)}{2}$ 。(6 分)

(3)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n^2} = ?$  (2 分)

**RA692 全國公私立高中 108 學年度第六次模考-數學甲(南一版)**

**參考答案**

選擇題：1. (3) 2. (4) 3. (2) 4. (1)(2)(3) 5. (2)(3) 6. (1)(2)(4)(5) 7. (1)(2)(3)(5)  
8. (1)(2)(4)(5)

選填題：A. 8 B.  $\frac{7}{4}$  C.  $\frac{4}{5}$

非選擇題：一、(1) (16,0) (2) 4 (3)  $-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$

二、(1) 略 (2) 略 (3)  $\frac{1}{2}$