數學考科詳解

題號	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	
答案	(3)	(2)	(1)	(2)(3)(5)	(1)(2)(3)	(1)(2)(4)	(3)(5)	(2)(4)(5)	

第壹部分：選擇題

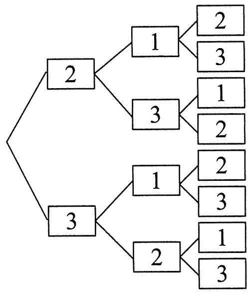
一、單選題

1. (3)

出處：選修數學甲(上)第一章〈機率統計〉

目標：樹狀圖，期望值的定義

解析：轉動指針三次的所有可能情況，如右樹狀圖



令 X 為三次所停區域的標號數字和，則：

X	5	6	7	8
$P(X)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{4}{8}$	$\frac{2}{8}$	$\frac{1}{8}$

所以 $E(X)=5\cdot\frac{1}{8}+6\cdot\frac{4}{8}+7\cdot\frac{2}{8}+8\cdot\frac{1}{8}$

$=\frac{51}{8}=6.375$

故選(3)。

2. (2)

出處：第四冊第二章〈空間中的平面與直線〉

目標：空間坐標，向量的外積，兩歪斜線求距離

解析：訂一坐標系，$E(0,0,0)$，$A(0,0,3)$，$F(3,0,0)$，$H(0,6,0)\Rightarrow B(3,0,3)$，$D(0,6,3)$

設平面 K 包含直線 AF 且平行直線 BD，

因為 $\overrightarrow{AF}\times\overrightarrow{BD}=(18,9,18)\,//\,(2,1,2)$

所以平面 K 為 $2x+y+2z-6=0$

又 B 點到平面 K 的距離為 $\frac{|2\times3+0+2\times3-6|}{\sqrt{2^2+1^2+2^2}}=2$

$\Rightarrow$ 直線 BD 與直線 AF 的距離為 2

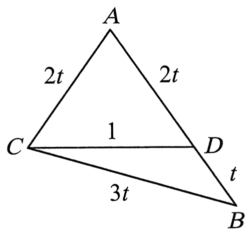
故選(2)。

3. (1)

出處：第三冊第一章〈三角〉

目標：餘弦定理

解析：$\overline{AD}=2\overline{BD}$ 且 $\overline{AB}=\overline{BC}$



故令 $\overline{BD}=t$，$\overline{AD}=2t$，$\overline{BC}=3t$

又△ACD 與△BCD 周長相等

$\Rightarrow\overline{AC}=2t$

△ACD 與△ABC 中

由餘弦定理知，

$\cos A=\frac{4t^2+4t^2-1^2}{2\cdot2t\cdot2t}=\frac{4t^2+9t^2-9t^2}{2\cdot2t\cdot3t}$

解得 $t=\frac{\sqrt{3}}{4}$

$\Rightarrow$△ACD 周長為 $1+4t=1+\sqrt{3}$

故選(1)。

二、多選題

4. (2)(3)(5)

出處：第一冊第二章〈多項式函數〉

目標：虛根共軛成對，一次有理因式檢驗法，多項式不等式

解析：(1) ╳：$f(x)$ 為實係數多項式

故 $\overline{f(2-i)}=\overline{-5}\Rightarrow f(\overline{2-i})=-5\Rightarrow f(2+i)=-5$

(2) ○：$f(x)=(x^2-4x+5)(x^2+1)q(x)+g(x)\Rightarrow f(-i)=g(-i)\Rightarrow g(-i)=\overline{f(i)}=-1-12i$

(3) ○：因為 $f(2\pm i)=g(2\pm i)=-5$，

又 $\deg g(x)\leq 3\Rightarrow g(x)=(x^2-4x+5)(ax+b)-5$，

又 $g(i)=f(i)=-1+12i\Rightarrow(-1-4i+5)(ai+b)-5=-1+12i$

$\Rightarrow 4(1-i)(b+ai)=4(1+3i)$

$\Rightarrow(a+b)+(a-b)i=1+3i\Rightarrow\begin{cases}a=2\\b=-1\end{cases}$，

故 $g(x)=(x^2-4x+5)(2x-1)-5=2x^3-9x^2+14x-10$，

故當 $x<0\Rightarrow g(x)<0$ 恆成立

(4) ╳：由(3)知 $g(x)=2x^3-9x^2+14x-10=0$ 無負實根，

故可能的正有理根為：1，2，5，10，$\frac{1}{2}$，$\frac{5}{2}$，逐一檢查之，得 $g\left(\frac{5}{2}\right)=0$

(5) ○：由(4)知，$g(x)=(2x-5)(x^2-2x+2)$

$\Rightarrow g(x)-(x^2-2x+2)=(x^2-2x+2)(2x-6)$

所以 $g(x)=x^2-2x+2$ 只有一個實根 $x=3$

故 $y=g(x)$ 與 $y=x^2-2x+2$ 恰只有一個交點

故選(2)(3)(5)。

5. (1)(2)(3)

出處：第三冊第三章〈平面向量〉

目標：向量的加法與減法，向量的內積

解析：(1) ○：因為 $\overrightarrow{u}+2\overrightarrow{v}$ 與 $\overrightarrow{u}-2\overrightarrow{v}$ 互相垂直

所以 $\overrightarrow{u}$ 與 $2\overrightarrow{v}$ 所張成的四邊形為菱形

$\Rightarrow|\overrightarrow{u}|=2|\overrightarrow{v}|$

(2) ○：當 $\overrightarrow{u}$ 與 $2\overrightarrow{v}$ 所張成的四邊形為正方形

(3) ○：因為 $\overrightarrow{u}+2\overrightarrow{v}$ 平分 $\overrightarrow{u}$ 與 $\overrightarrow{v}$ 的夾角

(4) ╳：因為未給向量的長度

(5) ╳：因為 $\overrightarrow{u}$ 與 $\overrightarrow{v}$ 不平行，所以 $|\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}|<|\overrightarrow{u}||\overrightarrow{v}|=2$

故選(1)(2)(3)。

6. (1)(2)(4)

出處：第一冊第三章〈指數、對數函數〉、第二冊第一章〈數列與級數〉

目標：等差數列、等比數列、對數的運算、對數函數的圖形

解析：(1) ○：由圖形可知：$0<a<b\Rightarrow$ 公比 $=\frac{b}{a}>1$

(2) ○：$\frac{\log_2 a+\log_2 c}{2}=\frac{1}{2}\log_2 ac=\log_2(b^2)^{\frac{1}{2}}=\log_2 b$

(3) ╳：由(2)知 $\log_2 b=\frac{\log_2 a+\log_2 c}{2}$，又凹口向下，

故 $\log_2\frac{a+c}{2}>\frac{\log_2 a+\log_2 c}{2}=\log_2 b$

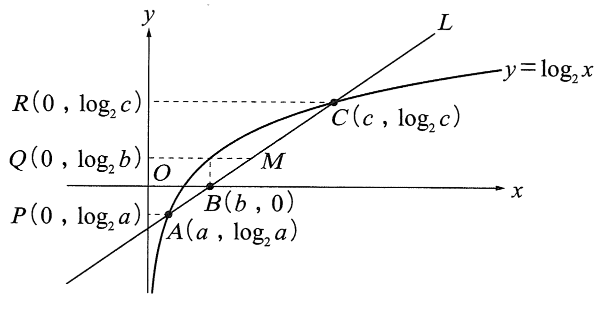
(4) ○：由(2)知 $\log_2 a$，$\log_2 b$，$\log_2 c$ 三數成等差，

如右圖所示：

可知 $\overline{PQ}=\overline{QR}$，

水平線 $y=\log_2 b$ 交 L 於 $\overline{AC}$ 中點 M

故 $\overline{AB}<\overline{AM}<\overline{BC}$



(5) ╳：令 $a=\dfrac{b}{3}$，$c=3b$，由 A，B，C 共線，

故 $m_{AB}=m_{BC}\Rightarrow\dfrac{-\log_2\dfrac{b}{3}}{b-\dfrac{b}{3}}=\dfrac{\log_2 3b}{3b-b}\Rightarrow\dfrac{-\log_2 b+\log_2 3}{\dfrac{2b}{3}}=\dfrac{\log_2 b+\log_2 3}{2b}$

$\Rightarrow -3\log_2 b+3\log_2 3=\log_2 b+\log_2 3$

$\Rightarrow 2\log_2 3=4\log_2 b\Rightarrow b=\sqrt{3}$

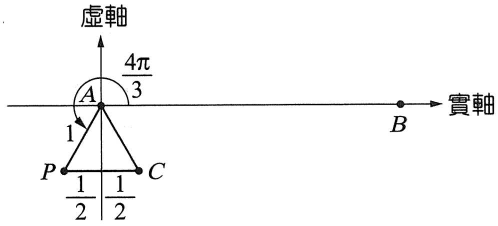
故選(1)(2)(4)。

7. (3)(5)

出處：選修數學甲(上)第二章〈三角函數〉

目標：複數的極式，複數運算的幾何意涵，棣美弗定理

解析：(1) ╳：令 $P\left(\cos\dfrac{4\pi}{3}+i\sin\dfrac{4\pi}{3}\right)$



因為 $\overline{PA}=\overline{PC}=1$ 且 $\angle APC=\dfrac{\pi}{3}$

所以 $\triangle APC$ 為正三角形

$\Rightarrow C$ 的主輻角為 $\dfrac{5\pi}{3}$

(2) ╳：$\angle BAC=2\pi-\dfrac{5\pi}{3}=\dfrac{\pi}{3}$

(3) ○：$\triangle ABC$ 的面積 $=\dfrac{1}{2}\times1\times4\times\sin\dfrac{\pi}{3}=\sqrt{3}$

(4) ╳：因為 $1+\cos\dfrac{4\pi}{3}+i\sin\dfrac{4\pi}{3}=\cos\dfrac{5\pi}{3}+i\sin\dfrac{5\pi}{3}$

所以 $x^3=1+\cos\dfrac{4\pi}{3}+i\sin\dfrac{4\pi}{3}$ 的解為

$\cos\left(\dfrac{5\pi}{9}+\dfrac{2k\pi}{3}\right)+i\sin\left(\dfrac{5\pi}{9}+\dfrac{2k\pi}{3}\right)$，其中 $k=0$，1，2

依序落在第二、三、四象限

(5) ○：$|z^3|=\left|\cos\dfrac{5\pi}{3}+i\sin\dfrac{5\pi}{3}\right|=1$，所以 $|z|=1$

故選(3)(5)。

8. (2)(4)(5)

出處：第一冊第一章〈數與式〉、選修數學甲(上)第二章〈三角函數〉

目標：算幾不等式，三角函數的值域

解析：(1) ╳：$0<2x<\pi$，當 $2x\to0$ 或 π，則 $\dfrac{2}{\sin 2x}\to\infty$，故無最大值

(2) ○：由算幾不等式：$\dfrac{2\cos x+\dfrac{1}{\cos x}}{2}\geq\sqrt{2\cos x\cdot\dfrac{1}{\cos x}}\Rightarrow g(x)\geq2\sqrt{2}$，且等號成立時

$\Leftrightarrow 2\cos x=\dfrac{1}{\cos x}\Leftrightarrow\cos x=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

故 $x=\dfrac{\pi}{4}$ 時，$g(x)$ 有最小值 $2\sqrt{2}$

(3) ╳：由算幾不等式：$\dfrac{\sin 2x+\dfrac{2}{\sin 2x}}{2}\geq\sqrt{\sin 2x\cdot\dfrac{2}{\sin 2x}}\Rightarrow f(x)\geq2\sqrt{2}$，等號成立時

$\Leftrightarrow\sin 2x=\dfrac{2}{\sin 2x}\Leftrightarrow\sin 2x=\pm\sqrt{2}$，不合

故 $f(x)>2\sqrt{2}$

(4) ○：$f(x)=\sin 2x+\dfrac{1}{\sin 2x}+\dfrac{1}{\sin 2x}\geq 2\sqrt{\sin 2x\cdot\dfrac{1}{\sin 2x}}+\dfrac{1}{1}=2+1=3$，

其中等號成立時 $\Leftrightarrow\begin{cases}\sin 2x=\dfrac{1}{\sin 2x}\Leftrightarrow \sin 2x=\pm 1\\ \sin 2x=1\end{cases}$

故當 $\sin 2x=1$ 時，有最小值 3，此時 $2x=\dfrac{\pi}{2}\Rightarrow x=\dfrac{\pi}{4}$

(5) ○：由(2)、(4)可知，當 $x=\dfrac{\pi}{4}$ 時，$f(x)$ 與 $g(x)$ 分別有最小值 3 與 $2\sqrt{2}$，

故 $f(x)+g(x)$ 之最小值為 $3+2\sqrt{2}$

故選(2)(4)(5)。

三、選填題

A. $(-3,-3)$

出處：第三冊第二章〈直線與圓〉

目標：直線方程式，圓的方程式

解析：由題設條件知，圓心為兩直線 $3x-4y-3=0$ 與 $2x-y+3=0$ 的交點

故圓心為 $(-3,-3)$。

B. $\dfrac{1}{2}$

出處：第四冊第三章〈矩陣〉

目標：平面上的線性變換，直線的斜率

解析：設 $P(x,y)$ 為 L 上任一點，且點 P 經 A 變換後對應到點 $P'(x',y')$，

即 $\begin{bmatrix}x'\\y'\end{bmatrix}=A\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=A^{-1}\begin{bmatrix}x'\\y'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{2}{5}&\frac{1}{5}\\-\frac{1}{5}&\frac{2}{5}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x'\\y'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{2}{5}x'+\frac{1}{5}y'\\-\frac{1}{5}x'+\frac{2}{5}y'\end{bmatrix}$

又 $\left(\dfrac{2}{5}x'+\dfrac{1}{5}y'\right)+2\left(-\dfrac{1}{5}x'+\dfrac{2}{5}y'\right)+2=0$，化簡得 $y'+2=0$

所以 L' 的方程式為 $y+2=0$

故 $\tan\theta=\dfrac{1}{2}$。

C. $\dfrac{1}{22}$

出處：第二冊第三章〈機率〉

目標：條件機率，排列組合

解析：令 A 事件：4 次點數和為 9，B 事件：前兩次至少一次 3 點

則所求為 $P(A\mid B)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(B)}=\dfrac{n(A\cap B)}{n(B)}$，其中 $n(B)=(6^2-5^2)\cdot 6^2=11\cdot 6^2$

考慮事件 $A\cap B$ 所有的組合：

(1)前兩次恰兩次 3 點：

$\boxed{3}\boxed{3}\boxed{a}\boxed{b}$，則 $a+b=3\Rightarrow(a,b)=(1,2)$，$(2,1)$，共 2 組

(2)前兩次恰一次 3 點：

$\boxed{3}\boxed{a}\boxed{b}\boxed{c}$，則 $a+b+c=6$ 且 $a\neq 3$

$\Rightarrow(a,b,c)=(1,1,4)$，$(1,2,3)$，$(2,2,2)$ 及其直線排列，

但 $a\neq 3$，故有 $\dfrac{3!}{2!}+(3!-2!)+1=8$ 組

$\boxed{a}\boxed{3}\boxed{b}\boxed{c}$ 與 $\boxed{3}\boxed{a}\boxed{b}\boxed{c}$ 的討論相同，故也有 8 組

由(1)、(2)得：$n(A\cap B)=18\Rightarrow P(A\mid B)=\dfrac{18}{11\cdot 6^2}=\dfrac{1}{22}$。

第貳部分：非選擇題

一、(1) $p_2=\dfrac{5}{24}$，$p_3=\dfrac{7}{40}$；(2) $k=1$，2，3，4，5；(3) $\dfrac{31}{10}$

出處：選修數學甲(上)第一章〈機率統計〉

目標：期望值，機率

解析：(1) $p_2=\dfrac{14\cdot 13-12\cdot 11}{16\cdot 15}=\dfrac{5}{24}$；$p_3=\dfrac{12\cdot 11-10\cdot 9}{16\cdot 15}=\dfrac{7}{40}$。

(2) $p_k=\dfrac{(18-2k)\cdot(17-2k)-(16-2k)\cdot(15-2k)}{16\cdot 15}=\dfrac{33-4k}{120}>\dfrac{1}{10}$

$\Rightarrow k<\dfrac{21}{4}$，故 $k=1$，2，3，4，5。

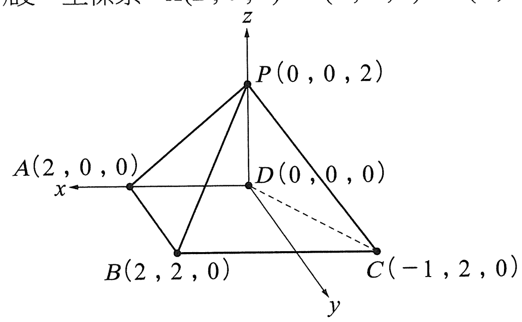
(3) $E(X)=\sum\limits_{k=1}^{8}p_k\cdot k=\sum\limits_{k=1}^{8}\dfrac{(33-4k)k}{120}=\dfrac{33}{120}\sum\limits_{k=1}^{8}k-\dfrac{1}{30}\sum\limits_{k=1}^{8}k^2=\dfrac{31}{10}$。

二、(1)證明略；(2) $\dfrac{2}{3}$

出處：第四冊第二章〈空間中的平面與直線〉

目標：平面方程式，直線方程式，向量的外積

解析：(1)設一坐標系，$A(2,0,0)$，$B(2,2,0)$，$D(0,0,0)$，$P(0,0,2)$，$C(-1,2,0)$



因為 E 為 $\overline{PA}$ 中點，所以 $E(1,0,1)$

又 F 在 $\overline{PB}$ 上且 $\overline{BF}=2\overline{PF}$，所以 $F\left(\dfrac{2}{3},\dfrac{2}{3},\dfrac{4}{3}\right)$

$\Rightarrow \overrightarrow{EF}=\left(-\dfrac{1}{3},\dfrac{2}{3},\dfrac{1}{3}\right)$，$\overrightarrow{DP}\times\overrightarrow{DC}=(-4,-2,0)$

因為 $\overrightarrow{DP}\times\overrightarrow{DC}$ 為平面 CDP 的法向量

且 $\overrightarrow{EF}\cdot(\overrightarrow{DP}\times\overrightarrow{DC})=\left(-\dfrac{1}{3},\dfrac{2}{3},\dfrac{1}{3}\right)\cdot(-4,-2,0)=0$

故直線 EF 平行平面 CDP。

(2)因為 $\overrightarrow{DE}\times\overrightarrow{DF}=\left(-\dfrac{2}{3},-\dfrac{2}{3},\dfrac{2}{3}\right)$

所以平面 DEF 的方程式為 $x+y-z=0$

又 G 點坐標為 $(-k,2k,2-2k)$

把 G 代入 $x+y-z=0$，解得 $k=\dfrac{2}{3}$。

非選擇題批改原則

第貳部分：非選擇題

一、(1) $p_2=\dfrac{5}{24}$，$p_3=\dfrac{7}{40}$；(2) $k=1$，2，3，4，5；(3) $\dfrac{31}{10}$

出處：選修數學甲(上)第一章〈機率統計〉

目標：期望值，機率

解析：(1) $p_2=\dfrac{14\cdot 13-12\cdot 11}{16\cdot 15}=\dfrac{5}{24}$ (2 分)；$p_3=\dfrac{12\cdot 11-10\cdot 9}{16\cdot 15}=\dfrac{7}{40}$。 (2 分)

(2) $p_k=\dfrac{(18-2k)\cdot(17-2k)-(16-2k)\cdot(15-2k)}{16\cdot 15}=\dfrac{33-4k}{120}>\dfrac{1}{10}$ (2 分)

$\Rightarrow k<\dfrac{21}{4}$ (1 分)，故 $k=1，2，3，4，5$。 (2 分)

(3) $E(X)=\sum_{k=1}^{8}p_k\cdot k=\sum_{k=1}^{8}\dfrac{(33-4k)k}{120}$ (2 分)

$=\dfrac{33}{120}\sum_{k=1}^{8}k-\dfrac{1}{30}\sum_{k=1}^{8}k^2$ (1 分)

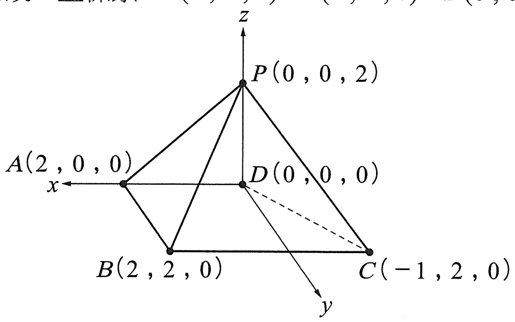
$=\dfrac{31}{10}$。 (2 分)

二、(1)證明略；(2) $\dfrac{2}{3}$

出處：第四冊第二章〈空間中的平面與直線〉

目標：平面方程式，直線方程式，向量的外積

解析：(1)設一坐標系，$A(2,0,0)$，$B(2,2,0)$，$D(0,0,0)$，$P(0,0,2)$，$C(-1,2,0)$



因為 E 為 $\overline{PA}$ 中點，所以 $E(1,0,1)$

又 F 在 $\overline{PB}$ 上且 $\overline{BF}=2\overline{PF}$，所以 $F\left(\dfrac{2}{3},\dfrac{2}{3},\dfrac{4}{3}\right)$ (2 分)

$\Rightarrow \overrightarrow{EF}=\left(-\dfrac{1}{3},\dfrac{2}{3},\dfrac{1}{3}\right)$，$\overrightarrow{DP}\times\overrightarrow{DC}=(-4,-2,0)$ (2 分)

因為 $\overrightarrow{DP}\times\overrightarrow{DC}$ 為平面 CDP 的法向量

且 $\overrightarrow{EF}\cdot(\overrightarrow{DP}\times\overrightarrow{DC})=\left(-\dfrac{1}{3},\dfrac{2}{3},\dfrac{1}{3}\right)\cdot(-4,-2,0)=0$ (1 分)

故直線 EF 平行平面 CDP。

(2)因為 $\overrightarrow{DE}\times\overrightarrow{DF}=\left(-\dfrac{2}{3},-\dfrac{2}{3},\dfrac{2}{3}\right)$ (2 分)

所以平面 DEF 的方程式為 $x+y-z=0$ (1 分)

又 G 點坐標為 $(-k,2k,2-2k)$

把 G 代入 $x+y-z=0$，解得 $k=\dfrac{2}{3}$。 (2 分)