

108 學年度全國高級中學指定科目第八次(108-E8)

複習考數學甲



第壹部分：選擇題 (占 76 分)

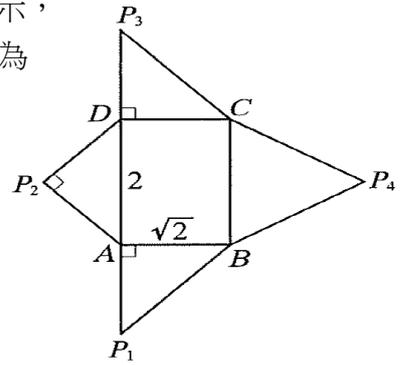
一、單選題 (占 18 分)

- 在空間坐標中，有兩個一直保持等速直線運動的質點 P 、 Q ，在某一時刻同時觀察兩質點 P 、 Q 坐標分別為 $P_0(-1, -2, 2)$ 、 $Q_0(2, 4, 1)$ ，經過 1 秒後再觀察兩質點 P 、 Q 坐標分別為 $P_1(-3, 0, 3)$ 、 $Q_1(3, 6, -1)$ ，試問在整個運動過程中，兩質點 P 、 Q 最近的距離為下列哪一個選項？ (1) $\sqrt{45}$ (2) $\sqrt{42}$ (3) $\sqrt{38}$ (4) 6 (5) $\sqrt{32}$
- 在坐標平面上，一道光線沿著方向 $\vec{u} = (5, 5)$ 射出，碰到直線 $L: x - 2y = 3$ 之後，假設光線依光學原理（即入射角等於反射角）反射，若反射線的前進方向為 $\vec{v} = (p, q)$ ，且 p 、 q 均為整數，則 $p + q$ 有可能為下列哪個選項？ (1) -8 (2) 0 (3) 4 (4) 7 (5) 16
- 已知 n 為正整數且 6^n 展開後為 39 位數，試問下列選項何者錯誤？
(已知 $\log 2 \approx 0.3010$ ， $\log 3 \approx 0.4771$)
(1) n 值可能為 7 的倍數 (2) n 值可能為 5 的倍數 (3) 6^n 展開後的最高位數可能為 9
(4) 6^n 展開後的最高位數可能為 1 (5) 6^n 展開後的個位數為 6

二、多選題 (占 40 分)

- 在複數平面上，設 $\omega = \cos \frac{\pi}{5} + i \sin \frac{\pi}{5}$ ，試問下列選項何者正確？
(1) $\omega^5 = 1$ (2) $1 - \omega$ 的主幅角為 $\frac{2\pi}{5}$ (3) $|\omega + 2\omega^2 + 3\omega^3 + \dots + 10\omega^{10}| = 5 \csc \frac{\pi}{10}$
(4) 方程式 $z^{10} = 1$ 的根為 $z = \omega^k, k = 0, 1, 2, \dots, 9$
(5) 設多邊形 $P_0P_1P_2 \dots P_9$ 是單位圓 O 內接正十邊形，其中 $P_0(1, 0)$ ，則
 $|\vec{P}_0\vec{P}_1| \times |\vec{P}_0\vec{P}_2| \times |\vec{P}_0\vec{P}_3| \times \dots \times |\vec{P}_0\vec{P}_9| = 9$
- 下列關於旋轉矩陣與鏡射矩陣的敘述中，何者恆為真？
(1) 鏡射矩陣的行列式值為 1 (2) 旋轉矩陣 R 的反方陣恰是其轉置矩陣 R^T
(3) 鏡射矩陣 A 的反方陣恰是 A
(4) 點 P 先以 x 軸為對稱軸作鏡射得到點 P' ，再將點 P' 以原點為中心，逆時針旋轉 120° 得到點 P'' ；若將 P 點對直線 $L: y = \sqrt{3}x$ 作鏡射，亦可得點 P''
(5) 點 Q 先以直線 $L: y = \sqrt{3}x$ 作鏡射得到點 Q' ，再以直線 $L': y = (\tan 36^\circ)x$ 作鏡射得到點 Q'' ；若將 Q 點對直線 $L'': y = (\tan 24^\circ)x$ 作鏡射，亦可得點 Q''
- 在複數平面中， Γ 表圓心在原點的單位圓。已知實係數二次方程式 $x^2 + ax + b = 0$ 的兩虛根在 Γ 上；實係數四次方程式 $x^4 + cx^3 + dx^2 + ex + f = 0$ 的四虛根亦在 Γ 上。試問下列選項何者正確？
(1) $b = 1$ (2) $-2 < a < 2$ (3) c, d, e, f 均相異 (4) $-4 < c < 4$ (5) $e^2 - 4d \geq 8$
- 下列選項關於收斂、發散性的敘述何者正確？
(1) $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \cos \frac{1}{x}$ 知極限值不存在(發散) (2) $\lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n = \pm 1$ (3) $\sum_{n=1}^{\infty} (\log_{\cos 1} \sin 1)^n$ 為收斂
(4) $\left(\frac{2}{1} - \frac{3}{2}\right) + \left(\frac{3}{2} - \frac{4}{3}\right) + \left(\frac{4}{3} - \frac{5}{4}\right) + \dots + \left(\frac{n+1}{n} - \frac{n+2}{n+1}\right) + \dots = 2$
(5) 若無窮數列 $\{a_n\}$ 收斂至 0，則無窮級數 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 亦收斂

8. 有一底面為矩形的四角錐 $P-ABCD$ ，其展開圖如右圖所示，其中 $\overline{AB} = \sqrt{2}$ ， $\overline{AD} = 2$ ，而 $\triangle P_1AB$ 、 $\triangle P_2AD$ 、 $\triangle P_3CD$ 均為斜邊長是 2 的等腰直角三角形。請選出下列正確選項？

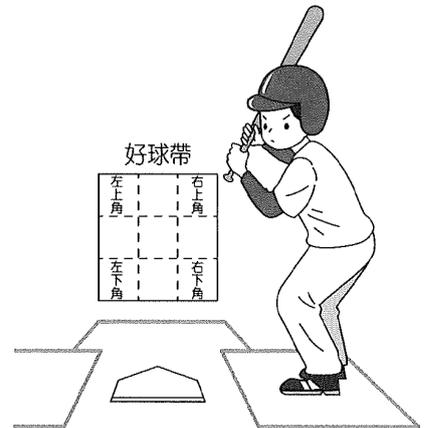


- (1) 平面 $PAD \perp$ 平面 $ABCD$
- (2) 四角錐 $P-ABCD$ 中互為歪斜的稜線有 8 對
- (3) 四角錐 $P-ABCD$ 的體積為 $\frac{2\sqrt{2}}{3}$
- (4) 平面 PAB 與平面 $ABCD$ 之銳夾角為 45°
- (5) 平面 PAB 與平面 PBC 之夾角的餘弦函數的絕對值為 $\frac{1}{3}$

三、選填題 (占 18 分)

A. 方程式 $x^2 + y^2 = 6x + 6\sqrt{3}|y|$ 之圖形所圍成區域的周長為_____。

B. 某大學教授統計美國大聯盟資料得出：當投手將球投入好球帶的左上角、右上角、左下角、右下角，裁判誤判成壞球的機率依次為 27%、27%、18%、14%。統計投手傑克將球投入各區域的次數，如下表，將投入各區域的比率當機率。假設投手傑克將球投入好球帶四個角落（之一）且裁判誤判成壞球，則此球是投入好球帶右上角的機率為_____。（化為最簡分數）



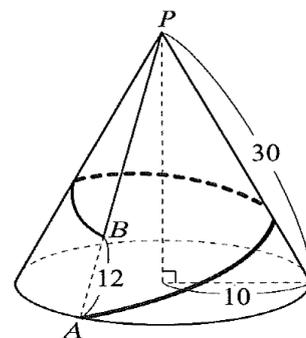
投入區域	好球帶 左上角	好球帶 右上角	好球帶 左下角	好球帶 右下角	其他區域 (例如：壞球帶， 好球帶中央，...)	總計
次數	10	5	15	10	60	100

C. 某一種擲骰子遊戲規則如下：一次擲出五顆公正骰子，如果出現么點個數少於非么點個數，就必須重擲，直到么點個數多於非么點個數為止。此時如果出現三個么點得獎金 23 元，出現四個么點得獎金 46 元，出現五個么點得獎金 276 元。則玩此遊戲獎金期望值為_____元。

第貳部分：非選擇題（占 24 分）

- 一、設三次函數 $f(x) = (x + \alpha)(x + 2)(x + \beta)$ ，其中 $\alpha > 2 > \beta > 0$ 。令 $y = f(x)$ 與 x 軸圍成兩個封閉區域，其面積分別為 A_1 、 A_2 ；而 $y = f(x)$ 與 x 軸、 y 軸圍成區域的面積令為 A_3 。已知 $A_1 = A_2 = A_3$ ，試求：
- (1) α 、 β 之值。(9 分)
 - (2) 通過 $y = f(x)$ 的反曲點之切線方程式。(3 分)

- 二、右圖是正圓錐形狀的山，正圓錐的斜高為 30 公里， $\overline{AB} = 12$ 公里，底圓半徑為 10 公里。有一條從山底 A 點連接到山腰 B 點的環山觀景公路，且是從 A 點到 B 點的最短路徑（如圖中粗線）。若某人從 A 點開車出發沿環山景觀公路到 B 點，請問：
- (1) 全程共開了多少公里？(4 分)
 - (2) 開車過程中上坡路、下坡路各有多少公里？(8 分)



**RA696 108 學年度全國高級中學指定科目第八次(108-E8)複習考數學甲
參考答案**

第壹部分：1.(3) 2.(5) 3.(3) 4.(3)(4) 5.(2)(3)(4) 6.(1)(2)(4) 7.(3)

8.(1)(2)(3)(4) A. 20π B. $\frac{27}{163}$ C. 26

第貳部分：一、(1) $\alpha = 2 + \sqrt{2}, \beta = 2 - \sqrt{2}$ (2) $y = -2x - 4$

二、(1) 42 公里 (2) 上坡 $\frac{195}{7}$ 公里，下坡 $\frac{99}{7}$ 公里