數學考科詳解

題號	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	
答案	(3)	(5)	(3)	(3)(4)	(2)(3)(4)	(1)(2)(4)	(3)	(1)(2)(3)(4)	

第壹部分：選擇題

一、單選題

1. (3)

出處：第四冊第一章〈空間向量〉

目標：空間向量基本運算

解析：兩質點 P、Q 每秒位移為 $\overrightarrow{P_0P_1}=(-2,2,1)$、$\overrightarrow{Q_0Q_1}=(1,2,-2)$

t 秒後 P、Q 位移為 $(-2t,2t,t)$、$(t,2t,-2t)$

$\therefore P$、Q 位置為 $(-1-2t,-2+2t,2+t)$、$(2+t,4+2t,1-2t)$

此時，P、Q 距離為 $\sqrt{[(-1-2t)-(2+t)]^2+[(-2+2t)-(4+2t)]^2+[(2+t)-(1-2t)]^2}$

$$=\sqrt{18t^2+24t+46}=\sqrt{18\left(t+\frac{2}{3}\right)^2+38}$$

當 $t=-\dfrac{2}{3}$ 時，P、Q 的距離最近為 $\sqrt{38}$

故選(3)。

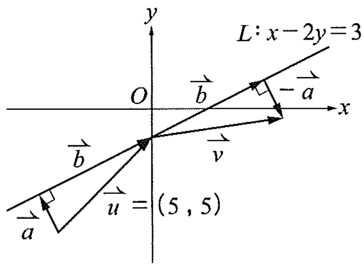
2. (5)

出處：第三冊第三章〈平面向量〉

目標：正射影

解析：L 的方向向量 $\overrightarrow{d}=(2,1)$

$\overrightarrow{u}$ 在 $\overrightarrow{d}$ 上的正射影 $\overrightarrow{b}=\left(\dfrac{\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{d}}{|\overrightarrow{d}|^2}\right)\overrightarrow{d}=(6,3)$



如右圖，$\overrightarrow{u}=\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}$　$\therefore \overrightarrow{a}=\overrightarrow{u}-\overrightarrow{b}=(-1,2)$

選 $\overrightarrow{v}=\overrightarrow{b}+(-\overrightarrow{a})=(6,3)-(-1,2)=(7,1)$

故所有可能 $\overrightarrow{v}=t(7,1)=(7t,t)$，$t\in N$

$\therefore p=7t$，$q=t$

$\Rightarrow p+q=8t=8$，16，24，……

故選(5)。

3. (3)

出處：第一冊第三章〈指數、對數函數〉

目標：位數與首位數

解析：(1)(2) $\because 6^n$ 為 39 位數

$\therefore 38\le\log 6^n<39$

$\Rightarrow 38\le n\log 6<39$

$\Rightarrow \dfrac{38}{\log 6}\le n<\dfrac{39}{\log 6}\Rightarrow\dfrac{38}{0.7781}\le n<\dfrac{39}{0.7781}$

$\Rightarrow 48.8\cdots\cdots\le n<50.1\cdots\cdots$

$\Rightarrow n=49$，50

(3)(4)①若 $n=49$ 時，

$\log 6^n=49\log 6\approx 49\times 0.7781=38.1269=38+0.1269$

$\Rightarrow$ 尾數 $=0.1269=\log 1.\cdots\cdots\Rightarrow$ 最高位數為 1

②若 $n=50$ 時，

$\log 6^n=50\log 6\approx 50\times 0.7781=38.905=38+0.905$

$\Rightarrow$ 尾數 $=0.905=\log 8.\cdots\cdots\Rightarrow$ 最高位數為 8

(5) 6^n 展開後的個位數恆為 6

故選(3)。

二、多選題

4. (3)(4)

出處：選修數學甲(上)　第二章〈三角函數〉

目標：複數極式、複數的 n 次方根、ω 的性質

解析：(1) ╳：$\omega=\cos\dfrac{2\pi}{10}+i\sin\dfrac{2\pi}{10}\Rightarrow\omega^{10}=1$

(2) ╳：$1-\omega=1-\left(\cos\dfrac{\pi}{5}+i\sin\dfrac{\pi}{5}\right)=\left(1-\cos\dfrac{\pi}{5}\right)-i\sin\dfrac{\pi}{5}=2\sin^2\dfrac{\pi}{10}-i\left(2\sin\dfrac{\pi}{10}\cos\dfrac{\pi}{10}\right)$

$$=2\sin\frac{\pi}{10}\left(\sin\frac{\pi}{10}-i\cos\frac{\pi}{10}\right)=2\sin\frac{\pi}{10}\left(\cos\frac{2\pi}{5}-i\sin\frac{2\pi}{5}\right)$$

$$=2\sin\frac{\pi}{10}\left(\cos\left(-\frac{2\pi}{5}\right)+i\sin\left(-\frac{2\pi}{5}\right)\right)$$

$\therefore 1-\omega$ 的主輻角為 $-\dfrac{2\pi}{5}+2\pi=\dfrac{8\pi}{5}$，且 $|1-\omega|=2\sin\dfrac{\pi}{10}$

(3) ○：令

$$\begin{array}{rrcccccccc} & S & = & \omega & + 2\omega^2 & + 3\omega^3 & + \cdots & & + 10\omega^{10} & \\ -) & \omega S & = & & \omega^2 & + 2\omega^3 & + 3\omega^4 & + \cdots & + 9\omega^{10} & + 10\omega^{11} \\ \hline & (1-\omega)S & = & \omega & + \omega^2 & + \omega^3 & + \cdots & & + \omega^{10} & - 10\omega^{11} \end{array}$$

$$=\frac{\omega(1-\omega^{10})}{1-\omega}-10\omega^{11}=-10\omega\ (\because\omega^{10}=1)$$

$\Rightarrow S=\dfrac{-10\omega}{1-\omega}$

故所求為 $|S|=\dfrac{|-10\omega|}{|1-\omega|}=\dfrac{10\cdot 1}{2\sin\dfrac{\pi}{10}}=5\csc\dfrac{\pi}{10}$

(4) ○

(5) ╳：$\because z^{10}=1$ 的十根在複數平面連成正十邊形且 $z_0=1$

$\therefore P_k(\omega^k)$，$k=0$，1，2，……，9

又 $(z-\omega)(z-\omega^2)(z-\omega^3)\cdots\cdots(z-\omega^9)=z^9+z^8+z^7+\cdots\cdots+z+1$

令 $z=1$ 代入得 $(1-\omega)(1-\omega^2)(1-\omega^3)\cdots\cdots(1-\omega^9)=10$ …………(∗)

$|\overrightarrow{P_0P_1}|\times|\overrightarrow{P_0P_2}|\times|\overrightarrow{P_0P_3}|\times\cdots\cdots\times|\overrightarrow{P_0P_9}|$

$=|1-\omega|\times|1-\omega^2|\times|1-\omega^3|\times\cdots\cdots\times|1-\omega^9|$

$=|(1-\omega)(1-\omega^2)(1-\omega^3)\cdots\cdots(1-\omega^9)|=10$ (由(∗)可知)

故選(3)(4)。

5. (2)(3)(4)

出處：第四冊第三章〈矩陣〉

目標：旋轉矩陣、鏡射矩陣

解析：(1) ╳：鏡射矩陣的行列式值為 $\begin{vmatrix}\cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta\end{vmatrix}$

$=-\cos^2 2\theta-\sin^2 2\theta=-1$

(2) ○：$R^{-1}=\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}\cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}=R^T$

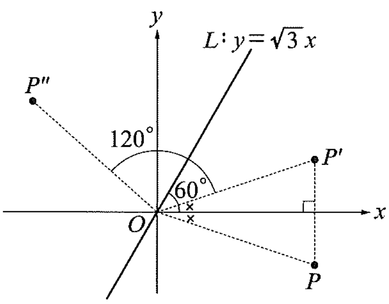
(3) ○：$\because A^2=I\quad\therefore A^{-1}=A$

(4) ○：由右圖知，

直線 L 的斜角(直線 L 與 x 軸正向所夾的有向角)為 60°

L 與 $\overline{OP}$ 的夾角 $=L$ 與 $\overline{OP''}$ 的夾角 $(=60^\circ+\times)$

故若將 P 點對直線 L：$y=\sqrt{3}x$ 作鏡射，亦可得點 P''



(5) ╳：兩鏡射矩陣之積為旋轉矩陣，故兩 Q'' 不相同

故選(2)(3)(4)。

6. (1)(2)(4)

出處：第一冊第二章〈多項式函數〉、選修數學甲(上)　第二章〈三角函數〉

目標：複數平面、虛根成對定理

解析：(1) ○：令實係數二次方程式 $x^2+ax+b=0$ 的兩共軛虛根為 α，$\overline{\alpha}$

又均在單位圓 Γ 上　$\therefore |\alpha|=|\overline{\alpha}|=1$

故 $\alpha \cdot \overline{\alpha}=\dfrac{b}{1} \Rightarrow b=|\alpha|^2=1$

(2) ○：$\because x^2+ax+1=0$ 有兩共軛虛根

$\therefore D=a^2-4\times1\times1<0 \Rightarrow a^2-4<0 \Rightarrow -2<a<2$

(3) ╳：令實係數四次方程式 $f(x)=x^4+cx^3+dx^2+ex+f=0$ 的兩兩共軛虛根為 β，$\overline{\beta}$，γ，$\overline{\gamma}$

又均在單位圓 Γ 上

$\therefore |\beta|=|\overline{\beta}|=|\gamma|=|\overline{\gamma}|=1$

$\therefore f(x)$ 可以分解為 $f(x)=(x-\beta)(x-\overline{\beta})(x-\gamma)(x-\overline{\gamma})$

$=[x^2-(\beta+\overline{\beta})x+\beta\overline{\beta}][x^2-(\gamma+\overline{\gamma})x+\gamma\overline{\gamma}]$

$=(x^2-mx+1)(x^2-nx+1)\cdots\cdots\cdots\cdots(*)$

$=x^4-(m+n)x^3+(mn+2)x^2-(m+n)x+1$

其中，m、n 分別表 β、γ 的 2 倍實部，$\beta\overline{\beta}=|\beta|^2=1$，$\gamma\overline{\gamma}=|\gamma|^2=1$

比較係數得 $c=e=-(m+n)$，$d=mn+2$，$f=1$

(4) ○：由$(*)$知：$x^2-mx+1=0$，$x^2-nx+1=0$ 均為兩共軛虛根

仿(2)可得：$-2<m<2$，$-2<n<2$

$\Rightarrow -4<m+n<4 \Rightarrow -4<c<4$

(5) ╳：$e^2-4d=[-(m+n)]^2-4(mn+2)$

$=m^2-2mn+n^2-8=(m-n)^2-8\geq -8$

故選(1)(2)(4)。

7. (3)

出處：選修數學甲(下)　第一章〈極限與函數〉

目標：無窮極限四則運算、夾擠原理、無窮(等比)級數

解析：(1) ╳：$\because -1\leq \cos\dfrac{1}{x}\leq 1$　$\therefore -x^2\leq x^2\cos\dfrac{1}{x}\leq x^2$

$\because \lim\limits_{x\to0}(-x^2)=\lim\limits_{x\to0}x^2=0$

$\therefore$由夾擠定理知 $\lim\limits_{x\to0}x^2\cos\dfrac{1}{x}=0$，即收斂到 0

(2) ╳：$\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^n$ 不存在

(3) ○：$\because 1$ (弧度) $\approx 57.3°(>45°)$

$\therefore (0<)\cos 1<\sin 1<1$

取 $\log_{\cos 1}$，得 $\log_{\cos 1}\cos 1>\log_{\cos 1}\sin 1>\log_{\cos 1}1 \Rightarrow 1>\log_{\cos 1}\sin 1>0$

$\therefore$無窮等比級數之公比為 $\log_{\cos 1}\sin 1$，介於 -1 到 1 之間

故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\log_{\cos 1}\sin 1)^n$ 收斂

(4) ╳：$S_n=\left(\dfrac{2}{1}-\dfrac{3}{2}\right)+\left(\dfrac{3}{2}-\dfrac{4}{3}\right)+\left(\dfrac{4}{3}-\dfrac{5}{4}\right)+\cdots\cdots+\left(\dfrac{n+1}{n}-\dfrac{n+2}{n+1}\right)$

$=2-\dfrac{n+2}{n+1}$

所求和為 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\lim\limits_{n\to\infty}\left(2-\dfrac{n+2}{n+1}\right)=2-1=1$

(5) ╳：反例：取 $\langle a_n\rangle=\left\langle\frac{1}{n}\right\rangle$ 收斂至 0，

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$$

$$=1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right)+\left(\frac{1}{9}+\cdots\cdots+\frac{1}{16}\right)+\cdots\cdots$$

$$\geq 1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}\right)+\left(\frac{1}{16}+\cdots\cdots+\frac{1}{16}\right)+\cdots\cdots$$

$$=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\cdots\cdots=\infty$$

故 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 發散

故選(3)。

8. (1)(2)(3)(4)

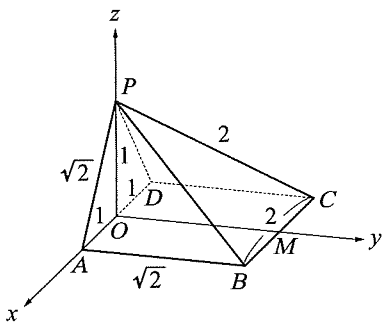
出處：第四冊第一章〈空間向量〉、第四冊第二章〈空間中的平面與直線〉

目標：空間幾何、平面方程式及其夾角

解析：(1) ○：∵ $\overline{DC}\perp\overline{DP}$，$\overline{DC}\perp\overline{DA}$ ∴平面 $ABCD\perp$ 平面 PAD

(2) ○：$\overline{PA}$ 配 $\overline{CB}$、$\overline{CD}$，$\overline{PB}$ 配 $\overline{DA}$、$\overline{DC}$，
$\overline{PC}$ 配 $\overline{AD}$、$\overline{AB}$，$\overline{PD}$ 配 $\overline{BA}$、$\overline{BC}$，共 8 對

(3) ○：將圖形坐標化，如右圖



$\overline{OA}=\overline{OD}=\overline{OP}=1$

$\overline{DP}=\overline{PA}=\overline{DC}=\overline{OM}=\overline{AB}=\sqrt{2}$

四角錐 $P-ABCD$ 的體積為

$\frac{1}{3}\times$(矩形 $ABCD$)$\times\overline{OP}=\frac{1}{3}\times2\sqrt{2}\times1=\frac{2\sqrt{2}}{3}$

(4) ○：平面 PAB：$\frac{x}{1}+\frac{z}{1}=1\Rightarrow$ 法向量 $\overrightarrow{n_1}=(1,0,1)$，平面 $ABCD$ (xy 平面)之法向量 $\overrightarrow{n_2}=(0,0,1)$

設平面 PAB 與平面 $ABCD$ 之夾角為 $\theta\Rightarrow\cos\theta=\frac{\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}}{|\overrightarrow{n_1}||\overrightarrow{n_2}|}=\frac{1}{\sqrt{2}\cdot1}=\frac{1}{\sqrt{2}}$，故 $\theta=45^\circ$

〈另解〉∵ $\overline{DA}\perp\overline{AB}$，$\overline{PA}\perp\overline{AB}$

∴平面 PAB 與平面 $ABCD$ 之銳夾角為 $\angle PAD=45^\circ$

(5) ╳：平面 PBC：$\frac{y}{\sqrt{2}}+\frac{z}{1}=1\Rightarrow y+\sqrt{2}z=\sqrt{2}\Rightarrow\overrightarrow{n_3}=(0,1,\sqrt{2})$

設平面 PAB 與平面 PBC 之夾角 $\alpha\Rightarrow|\cos\alpha|=\left|\frac{\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_3}}{|\overrightarrow{n_1}||\overrightarrow{n_3}|}\right|=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}}=\frac{1}{\sqrt{3}}$

故選(1)(2)(3)(4)。

三、選填題

A. 20π

出處：第三冊第二章〈直線與圓〉

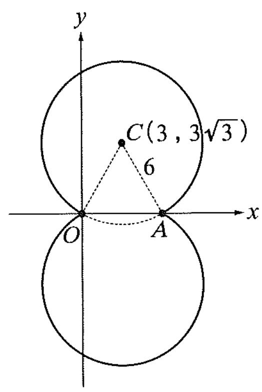
目標：圓方程式

解析：∵以 $-y$ 代 y，原式不變 ∴圖形對稱 x 軸

當 $y\geq0$ 時，原式化簡成 $x^2+y^2=6x+6\sqrt{3}y\Rightarrow(x-3)^2+(y-3\sqrt{3})^2=36$

$\Rightarrow$ 圓心 $C(3,3\sqrt{3})$，半徑 6

$x^2+y^2=6x+6\sqrt{3}|y|$ 圖形為右圖



∵ $\overline{CO}=\overline{CA}=\overline{OA}=6$ ∴△COA 為正三角形

∴圓心角 $\angle OCA=60^\circ$

$2\times(360^\circ-60^\circ)=600^\circ$

所求周長為 $\frac{600^\circ}{360^\circ}\times(2\pi\cdot6)=20\pi$。

B. $\dfrac{27}{163}$

出處：第二冊第三章〈機率〉

目標：貝氏定理

解析：

投入區域	好球帶左上角	好球帶右上角	好球帶左下角	好球帶右下角	其他區域
機率	0.1	0.05	0.15	0.1	0.6

設 A 事件：球投入好球帶四個角落(之一)且裁判誤判成壞球

B 事件：投入好球帶右上角

所求為 $P(B\mid A)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(A)}=\dfrac{0.05\times 27\%}{0.1\times 27\%+0.05\times 27\%+0.15\times 18\%+0.1\times 14\%}=\dfrac{27}{163}$。

C. 26

出處：選修數學甲(上)　第一章〈機率統計〉

目標：期望值

解析：$111\times\times \rightarrow \dfrac{5!}{3!\times 2!}\times 5\times 5=250$ 種

$1111\times \rightarrow \dfrac{5!}{4!}\times 5=25$ 種

$11111 \rightarrow 1$ 種

$n(S)=250+25+1=276$

$E=\dfrac{250}{276}\times 23+\dfrac{25}{276}\times 46+\dfrac{1}{276}\times 276=26$(元)。

第貳部分：非選擇題

一、(1) $\alpha=2+\sqrt{2}$，$\beta=2-\sqrt{2}$；(2) $y=-2x-4$

出處：選修數學甲(下)　第二章〈多項式函數的微積分〉

目標：切線斜率、三次函數論、曲線間面積求法

解析：(1)①$\because \alpha>2>\beta>0$　$\therefore -\alpha<-2<-\beta<0$

$f(x)=0 \Rightarrow x=-\alpha$，$-2$，$-\beta$，如圖(一)

②$\because A_1=A_2$ 且三次函數的對稱中心就是反曲點

$\therefore y=f(x)$ 的反曲點為 $(-2, 0)$

③將所有圖形向右平移 2 單位，如圖(二)

$y=f(x)\xrightarrow{\text{向右平移 2 單位}} y=h(x)$

$y=f(x)$ 的對稱中心 $(-2, 0)\xrightarrow{\text{向右平移 2 單位}} y=h(x)$ 的對稱中心 $(0, 0)$

y 軸 $\xrightarrow{\text{向右平移 2 單位}} x=2$

④$\because y=h(x)$ 的對稱中心為 $O(0, 0)$　$\therefore$ 設 $\overline{OP}=\overline{OQ}=\ell\ (>0)$

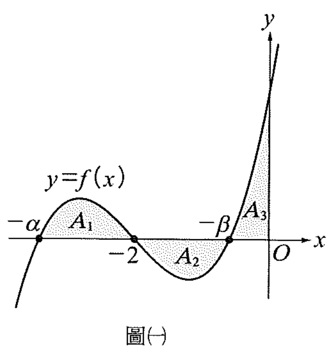
$\Rightarrow P(\ell, 0)$、$Q(-\ell, 0) \Rightarrow y=h(x)=(x-\ell)(x+\ell)x=x^3-\ell^2x$

$\because A_2=A_3$　$\therefore \int_0^2(x^3-\ell^2x)dx=0$

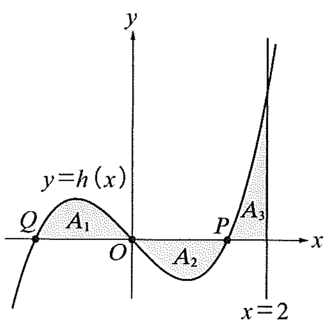
$$\Rightarrow \left(\frac{1}{4}x^4-\frac{\ell^2}{2}x^2\right)\Bigg|_0^2=0 \Rightarrow \left(\frac{1}{4}\cdot 2^4-\frac{\ell^2}{2}\cdot 2^2\right)-0=0 \Rightarrow 4-2\ell^2=0 \Rightarrow \ell=\sqrt{2}$$

$\therefore -\alpha=-2-\sqrt{2}$，$-\beta=-2+\sqrt{2}$

$\Rightarrow \alpha=2+\sqrt{2}$，$\beta=2-\sqrt{2}$。



圖(一)



圖(二)

〈另解〉

①$\because \alpha>2>\beta>0 \quad \therefore -\alpha<-2<-\beta<0$

$f(x)=0 \Rightarrow x=-\alpha$，$-2$，$-\beta$，如圖(一)

②$\because A_1=A_2 \quad \therefore$三次函數 $y=f(x)$ 的對稱中心(反曲點)為 $(-2,0)$

故 $(-\alpha)+(-\beta)=2\times(-2) \Rightarrow \alpha+\beta=4$ ……………………………………………………❶

③$f(x)=(x+\alpha)(x+2)(x+\beta)$

$=x^3+(\alpha+\beta+2)x^2+(\alpha\beta+2\alpha+2\beta)x+2\alpha\beta=x^3+6x^2+(\alpha\beta+8)x+2\alpha\beta$ ……………❷

④$\because A_2=A_3 \quad \therefore \int_{-2}^{0}(x^3+6x^2+(\alpha\beta+8)x+2\alpha\beta)dx=0$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{4}x^4+2x^3+\frac{\alpha\beta+8}{2}x^2+2\alpha\beta x\right)\Bigg|_{-2}^{0}=0$$

$$\Rightarrow 0-\left[\frac{1}{4}\cdot(-2)^4+2\cdot(-2)^3+\frac{\alpha\beta+8}{2}\cdot(-2)^2+2\alpha\beta\cdot(-2)\right]=0$$

$\Rightarrow \alpha\beta=2$ ……………………………………………………………………………………❸

⑤考慮以 $x=\alpha$，β 為根的二次方程式 $(x-\alpha)(x-\beta)=0 \Rightarrow x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta=0$

❶、❸代入，得 $x^2-4x+2=0 \Rightarrow x=2\pm\sqrt{2}$

$\because \alpha>\beta \quad \therefore \alpha=2+\sqrt{2}$，$\beta=2-\sqrt{2}$。

(2) $f(x)=[x+(2+\sqrt{2})](x+2)[x+(2-\sqrt{2})]=x^3+6x^2+10x+4$ (或將❸代入❷，亦可得之)

$f'(x)=3x^2+12x+10$

$m_{切}=f'(-2)=-2$

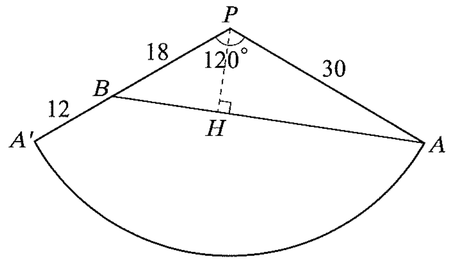
$\therefore$通過 $y=f(x)$ 的反曲點 $(-2,0)$ 之切線方程式為 $y-0=-2(x+2) \Rightarrow y=-2x-4$。

二、(1) 42 公里；(2)上坡 $\frac{195}{7}$ 公里，下坡路 $\frac{99}{7}$ 公里

出處：第三冊第一章〈三角〉

目標：餘弦定理、三角形面積公式

解析：(1)圓錐側面展開圖，如右圖，令$\angle APA'=\theta$



$\overset{\frown}{AA'}=2\pi\times10=30\times\theta \Rightarrow \theta=\frac{2\pi}{3}=120^\circ$

$\overline{AB}^2=30^2+18^2-2\times30\times18\times\cos 120^\circ=1764 \Rightarrow \overline{AB}=42$ (公里)

(2)作 $\overline{PH}\perp\overline{AB}$

$\because \triangle PAB$ 面積為 $\frac{1}{2}\overline{PA}\times\overline{PB}\times\sin 120^\circ=\frac{1}{2}\overline{AB}\cdot\overline{PH}$

$\therefore 30\times18\times\frac{\sqrt{3}}{2}=42\times\overline{PH} \Rightarrow \overline{PH}=\frac{45\sqrt{3}}{7}$

故上坡路 $\overline{AH}=\sqrt{30^2-\left(\frac{45\sqrt{3}}{7}\right)^2}=\frac{195}{7}$ (公里)，下坡路 $\overline{BH}=42-\frac{195}{7}=\frac{99}{7}$ (公里)。

〈另解〉

作 $\overline{PH}\perp\overline{AB}$

在$\triangle PAB$ 中，$\cos A=\frac{30^2+42^2-18^2}{2\times30\times42}=\frac{13}{14}$

故上坡路 $\overline{AH}=\overline{PA}\times\cos A=30\times\frac{13}{14}=\frac{195}{7}$ (公里)，下坡路 $\overline{BH}=42-\frac{195}{7}=\frac{99}{7}$ (公里)。