數學考科詳解

題號	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	
答案	(2)	(5)	(4)	(1)(3)(5)	(2)(3)(4)	(4)(5)	(2)(4)	(3)(4)(5)	

第壹部分：選擇題

一、單選題

1. (2)

出處：第一冊第三章〈指數、對數函數〉、第三冊第三章〈平面向量〉

目標：對數運算、三角形面積公式

解析：$\overrightarrow{AB}=(2\,,\log_2 18-2\log_2 6)=\left(2\,,\log_2\dfrac{18}{36}\right)=(2\,,-1)$

$\overrightarrow{AC}=(3\,,\log_2 72-2\log_2 6)=\left(3\,,\log_2\dfrac{72}{36}\right)=(3\,,1)$

$\triangle ABC$ 的面積為 $\dfrac{1}{2}\left|\begin{vmatrix}2 & -1\\ 3 & 1\end{vmatrix}\right|=\dfrac{5}{2}$，故選(2)。

2. (5)

出處：選修數學甲(下)第一章〈極限與函數〉

目標：函數極限的計算

解析：$x^2f(x)-f(x^2)=x^2(ax^2+(2-a)x+3)-(ax^4+(2-a)x^2+3)$

$=(2-a)x^3+(a+1)x^2-3$

利用長除法，

$$\begin{array}{r|rrrr}
 & (2-a) & +3 & +3 & \\
1-1 & (2-a) & +(a+1) & +0 & -3\\
 & (2-a) & -(2-a) & & \\ \hline
 & & 3 & +0 & \\
 & & 3 & -3 & \\ \hline
 & & & 3 & -3\\
 & & & 3 & -3\\ \hline
 & & & & 0
\end{array}$$

可得 $(2-a)x^3+(a+1)x^2-3=(x-1)\,[\,(2-a)x^2+3x+3\,]$

由 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2f(x)-f(x^2)}{x-1}=2\Rightarrow \lim\limits_{x\to 1}[\,(2-a)x^2+3x+3\,]=2$

$\Rightarrow (2-a)+3+3=2\Rightarrow a=6$

故選(5)。

3. (4)

出處：選修數學甲(上)第一章〈機率統計〉、選修數學甲(下)第一章〈極限與函數〉

目標：二項分布、無窮等比級數的和

解析：設甲擲了 a 次、乙擲了 b 次

所求機率為 $P(a=2\,,b=1)+P(a=3\,,b=2)+P(a=4\,,b=3)+\cdots\cdots+P(a=n+1\,,b=n)+\cdots\cdots$

$$=\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^4\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3+\cdots\cdots+\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n+\cdots\cdots$$

$$=\left(\frac{1}{2}\right)^3+\left(\frac{1}{2}\right)^5+\left(\frac{1}{2}\right)^7+\cdots\cdots+\left(\frac{1}{2}\right)^{2n+1}+\cdots\cdots$$

$$=\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^3}{1-\frac{1}{4}}=\frac{1}{6}$$

故選(4)。

二、多選題

4. (1)(3)(5)

出處：第四冊第三章〈矩陣〉

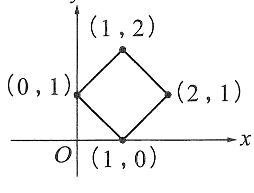
目標：二階方陣與平面變換

解析：$\Omega=\{(x\,,y)\,|\,|x-1|+|y-1|=1$，$x$，$y$ 是實數$\}$ 的圖形是一正方形

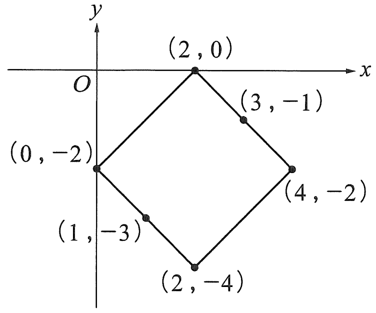
如右圖，頂點為 $(1\,,0)$、$(2\,,1)$、$(1\,,2)$、$(0\,,1)$

$\begin{bmatrix}0 & 2\\ -2 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ -2\end{bmatrix}$、$\begin{bmatrix}0 & 2\\ -2 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\ 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\ -4\end{bmatrix}$、

$\begin{bmatrix}0 & 2\\ -2 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4\\ -2\end{bmatrix}$、$\begin{bmatrix}0 & 2\\ -2 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\ 0\end{bmatrix}$，



Ω' 的圖形是一正方形，如下圖



故選(1)(3)(5)。

〈另解〉

由 $\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ 可得

$$\begin{cases} x' = 2y \\ y' = -2x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = \dfrac{x'}{2} \\ x = \dfrac{y'}{-2} \end{cases}$$

則 $\left|\dfrac{y'}{-2} - 1\right| + \left|\dfrac{x'}{2} - 1\right| = 1 \Rightarrow |x' - 2| + |y' + 2| = 2$

只有(1)(3)(5)符合

故選(1)(3)(5)。

5. (2)(3)(4)

出處：第二冊第一章〈數列與級數〉、選修數學甲(下)第一章〈極限與函數〉

目標：遞迴式、數列的極限

解析：$a_n = 23\times10^{-2} + 23\times10^{-4} + 23\times10^{-6} + \cdots\cdots + 23\times10^{-2(n-1)}$，其中 $n \geq 2$

(1)╳：數列〈a_2，a_3，a_4，……，a_n，……〉不是等比數列

(2)○：$a_n = \dfrac{23\times10^{-2}(1-0.01^{n-1})}{1-0.01} < \dfrac{23\times10^{-2}}{1-0.01} = \dfrac{23}{99} < \dfrac{1}{4}$

且 $a_1 = 0 < \dfrac{1}{4}$

(3)○：$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{23\times10^{-2}(1-0.01^{n-1})}{1-0.01} = \dfrac{23\times10^{-2}}{1-0.01} = \dfrac{23}{99}$，收斂

(4)○：$\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \dfrac{\dfrac{23\times10^{-2}(1-0.01^{n})}{1-0.01}}{\dfrac{23\times10^{-2}(1-0.01^{n-1})}{1-0.01}} = \dfrac{1-0.01^n}{1-0.01^{n-1}} \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = 1$，收斂

(5)╳：$n \geq 2$ 時，$a_n \geq 23\times10^{-2} \Rightarrow \sum\limits_{k=1}^{n} a_k \geq (n-1)\times0.23$，故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 發散

故選(2)(3)(4)。

6. (4)(5)

出處：選修數學甲(上)第二章〈三角函數〉

目標：三角函數圖形與正餘弦函數的疊合

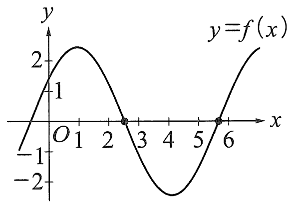
解析：$f(x) = 2\sin x + \sqrt{2}\cos x = \sqrt{6}\left(\dfrac{2}{\sqrt{6}}\sin x + \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{6}}\cos x\right) = \sqrt{6}\,(\sin x\cos\alpha + \cos x\sin\alpha)$

$= \sqrt{6}\,\sin(x+\alpha)$，其中 $\cos\alpha = \dfrac{2}{\sqrt{6}}$，$\sin\alpha = \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{6}}$

設 α 是銳角，則 $\dfrac{\pi}{6} < \alpha < \dfrac{\pi}{4}$

又 $f(x) - g(x) = (2-\sqrt{2})(\sin x - \cos x) = (2-\sqrt{2}) \cdot \sqrt{2}\sin\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right)$

(1)╳：$f(1+\pi) = 2\sin(1+\pi) + \sqrt{2}\cos(1+\pi) = -2\sin 1 - \sqrt{2}\cos 1 \neq f(1)$



(2) ╳：$y=f(x)=\sqrt{6}\sin(x+\alpha)$ 的圖形如右，

可得 $f(3)>f(4)$

(3) ╳：$f(3)-g(3)=(2-\sqrt{2})\cdot\sqrt{2}\sin\left(3-\dfrac{\pi}{4}\right)$，

$3-\dfrac{\pi}{4}$ 是第二象限角 $\Rightarrow f(3)-g(3)>0\Rightarrow f(3)>g(3)$

(4) ○：如右圖，$f(x)$ 的圖形與 x 軸有 2 個交點

(5) ○：$f(x)-g(x)=(2-\sqrt{2})\cdot\sqrt{2}\sin\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)=0$

又 $0\le x\le 2\pi$

$\Rightarrow x-\dfrac{\pi}{4}=0$，$\pi\Rightarrow x=\dfrac{\pi}{4}$，$\dfrac{5\pi}{4}$，有 2 個交點

故選(4)(5)。

7. (2)(4)

出處：選修數學甲(上)第二章〈三角函數〉

目標：複數平面、複數的 n 次方根

解析：$x^5=i=\cos 90^\circ+i\sin 90^\circ$，所以此方程式的 5 個解為

$x_0=\cos 18^\circ+i\sin 18^\circ$，

$x_1=\cos(18^\circ+72^\circ)+i\sin(18^\circ+72^\circ)=\cos 90^\circ+i\sin 90^\circ$，

$x_2=\cos(18^\circ+72^\circ\times 2)+i\sin(18^\circ+72^\circ\times 2)=\cos 162^\circ+i\sin 162^\circ$，

$x_3=\cos(18^\circ+72^\circ\times 3)+i\sin(18^\circ+72^\circ\times 3)=\cos 234^\circ+i\sin 234^\circ$，

$x_4=\cos(18^\circ+72^\circ\times 4)+i\sin(18^\circ+72^\circ\times 4)=\cos 306^\circ+i\sin 306^\circ$

考慮 $|1-(\cos\theta+i\sin\theta)|=\sqrt{(1-\cos\theta)^2+\sin^2\theta}=\sqrt{2-2\cos\theta}=\sqrt{2\cdot 2\sin^2\dfrac{\theta}{2}}=\left|2\sin\dfrac{\theta}{2}\right|$

所以 $|1-x_0|=\left|2\sin\dfrac{18^\circ}{2}\right|=2\sin 9^\circ$，$|1-x_1|=\left|2\sin\dfrac{90^\circ}{2}\right|=2\sin 45^\circ$，

$|1-x_2|=\left|2\sin\dfrac{162^\circ}{2}\right|=2\sin 81^\circ$，$|1-x_3|=\left|2\sin\dfrac{234^\circ}{2}\right|=2\sin 117^\circ=2\sin 63^\circ$，

$|1-x_4|=\left|2\sin\dfrac{306^\circ}{2}\right|=2\sin 153^\circ=2\sin 27^\circ$，故選(2)(4)。

8. (3)(4)(5)

出處：選修數學甲(上)第一章〈機率統計〉

目標：二項分布與期望值

解析：(1) ╳：$\dfrac{C^6_3C^6_3}{C^{12}_6}=\dfrac{100}{231}$

(2) ╳：$C^6_3\left(\dfrac{1}{2}\right)^3\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^3=\dfrac{5}{16}$

(3) ○：$C^6_3\cdot\dfrac{6}{12}\cdot\dfrac{5}{11}\cdot\dfrac{4}{10}\cdot\dfrac{6}{9}\cdot\dfrac{5}{8}\cdot\dfrac{4}{7}=\dfrac{100}{231}$

(4) ○：$C^{20}_8=\dfrac{20!}{8!12!}=\dfrac{9}{12}\cdot\dfrac{20!}{9!11!}=\dfrac{9}{12}C^{20}_9\Rightarrow \underbrace{C^{20}_8\left(\dfrac{1}{2}\right)^8\left(\dfrac{1}{2}\right)^{12}}_{8\text{白}12\text{紅}}<\underbrace{C^{20}_9\left(\dfrac{1}{2}\right)^9\left(\dfrac{1}{2}\right)^{11}}_{9\text{白}11\text{紅}}$

(5) ○：每次取中白球的機率為 $\dfrac{1}{2}$，連取 20 次

$\therefore$ 取出白球個數的期望值為 $20\times\dfrac{1}{2}=10$ (顆)

故選(3)(4)(5)。

三、選填題

A. $\sqrt{2}+2\sqrt{5}$

出處：第三冊第二章〈直線與圓〉、第三冊第三章〈平面向量〉

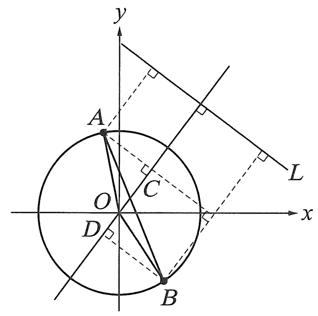
目標：直線與圓的關係、點到直線的距離

解析：如右圖，圓心 $O(0,0)$ 到直線 L 的距離為

$$\frac{|0+0-25|}{\sqrt{3^2+4^2}}=5 \Rightarrow \overline{OC}=5-3=2\text{，}\overline{OD}=6-5=1$$

$$\overline{AC}=\sqrt{3^2-2^2}=\sqrt{5}\text{，}\overline{BD}=\sqrt{3^2-1^2}=\sqrt{8}$$

$$\Rightarrow \overline{AB}=\sqrt{(\sqrt{5}+\sqrt{8})^2+(6-3)^2}=\sqrt{22+2\sqrt{40}}=\sqrt{2}+\sqrt{20}=\sqrt{2}+2\sqrt{5}\text{。}$$



B. $\frac{3}{2}$

出處：第四冊第一章〈空間向量〉、第四冊第二章〈空間中的平面與直線〉

目標：平行四邊形的面積、空間中兩平行線的距離

解析：設 $A(2,5,5)$、$B(a,-2,1)$、$\overrightarrow{v}=(1,2,2)$，則 $\overrightarrow{AB}=(a-2,-7,-4)$

$\overrightarrow{AB}$ 與 $\overrightarrow{v}$ 張成的平行四邊形面積為 $|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{v}|=\sqrt{(-6)^2+(-2a)^2+(2a+3)^2}=\sqrt{8a^2+12a+45}$

兩直線的距離為 3 $\Rightarrow \sqrt{8a^2+12a+45}=3|\overrightarrow{v}|=9$

$\Rightarrow 8a^2+12a+45=81 \Rightarrow (2a-3)(a+3)=0$，又 $a>0 \Rightarrow a=\frac{3}{2}$。

C. 5；5；5

出處：第三冊第一章〈三角〉、第三冊第三章〈平面向量〉

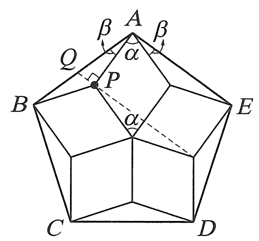
目標：線性組合、倍角公式

解析：如右圖，$5\alpha=360^\circ \Rightarrow \alpha=72^\circ$

$\beta=\frac{1}{2}(108^\circ-72^\circ)=18^\circ$，所以 $\angle PAE=90^\circ$

設 $\overline{AP}=a \Rightarrow \overline{AB}=2a\cos 18^\circ$

過 P 點作 $\overline{AE}$ 的平行線交 $\overline{AB}$ 於 Q，則 $\angle APQ=90^\circ \Rightarrow \overline{AQ}=\frac{a}{\cos 18^\circ}$



$$x=\frac{\overline{AQ}}{\overline{AB}}=\frac{\frac{a}{\cos 18^\circ}}{2a\cos 18^\circ}=\frac{1}{2\cos^2 18^\circ}$$

$$=\frac{1}{1+\cos 36^\circ}=\frac{1}{1+\frac{\sqrt{5}+1}{4}}=\frac{5-\sqrt{5}}{5}$$ ，故 $a=5$，$b=5$，$c=5$。

第貳部分：非選擇題

一、(1) $(-3,1,2)$；(2) $\sqrt{30}$；(3) 32

出處：第四冊第一章〈空間向量〉

目標：空間向量、向量外積與體積

解析：(1) $\overrightarrow{AP}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AG})=\frac{1}{2}[\overrightarrow{AE}+(\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD})]=\overrightarrow{AE}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$ ……①

$\overrightarrow{AQ}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AD})=\frac{1}{2}\overrightarrow{AE}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$ ……………………………………②

$\overrightarrow{AR}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AG})=\frac{1}{2}[\overrightarrow{AD}+(\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD})]=\frac{1}{2}\overrightarrow{AE}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$ ……③

解①、②、③，得

$\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{AQ}-\overrightarrow{AR}=(-1,3,6)+(0,2,3)-(2,4,7)=(-3,1,2)$

$\overrightarrow{AD}=-\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{AQ}+\overrightarrow{AR}=-(-1,3,6)+(0,2,3)+(2,4,7)=(3,3,4)$

$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AP}-3\overrightarrow{AQ}+\overrightarrow{AR}=(-1,3,6)-3(0,2,3)+(2,4,7)=(1,1,4)$

故 $\overrightarrow{AE}=(-3,1,2)$。

(2) $\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{AQ}-\overrightarrow{AP}=(0,2,3)-(-1,3,6)=(1,-1,-3)$

$\overrightarrow{PR}=\overrightarrow{AR}-\overrightarrow{AP}=(2,4,7)-(-1,3,6)=(3,1,1)$

$\triangle PQR$ 的面積為 $\frac{1}{2}|\overrightarrow{PQ}\times\overrightarrow{PR}|=\frac{1}{2}|(2,-10,4)|$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{2^2+(-10)^2+4^2}=\frac{1}{2}\sqrt{120}=\sqrt{30}\text{。}$$

(3)平行六面體 $ABCD-EFGH$ 的體積為 $\left|\begin{vmatrix}-3 & 1 & 2\\ 1 & 1 & 4\\ 3 & 3 & 4\end{vmatrix}\right|=32$。

二、(1) $\frac{2}{3}$；(2) $\frac{\sqrt{3}}{4}$；(3) $\frac{\sqrt{57}}{3}$

出處：第三冊第一章〈三角〉

目標：正弦定理、和差角公式

解析：(1)設圓 O 的半徑為 R，

由正弦定理：

$$\frac{\overline{AB}}{\sin\angle EDA}=2R=\frac{\overline{CD}}{\sin\angle EAD}\Rightarrow\frac{\sin\angle EDA}{\sin\angle EAD}=\frac{\overline{AB}}{\overline{CD}}=\frac{2}{3}\text{。}$$

(2)承(1)知 $\frac{\sin\angle EDA}{\sin\angle EAD}=\frac{2}{3}$

$\Rightarrow 3\sin\angle EDA=2\sin\angle EAD$

$\Rightarrow 3\sin\angle EDA=2\sin(60^\circ-\angle EDA)$

$\Rightarrow 3\sin\angle EDA=2(\sin 60^\circ\cos\angle EDA-\cos 60^\circ\sin\angle EDA)$

$\Rightarrow 3\sin\angle EDA=\sqrt{3}\cos\angle EDA-\sin\angle EDA$

$\Rightarrow 4\sin\angle EDA=\sqrt{3}\cos\angle EDA$

$\Rightarrow \tan\angle EDA=\frac{\sqrt{3}}{4}$。

(3) $\tan\angle EDA=\frac{\sqrt{3}}{4}\Rightarrow\sin\angle EDA=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{19}}$

$$2R=\frac{\overline{AB}}{\sin\angle EDA}=\frac{2}{\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{19}}}$$

$\therefore$圓 O 的半徑 R 為 $\frac{\sqrt{19}}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{57}}{3}$。

非選擇題批改原則

第貳部分：非選擇題

一、(1) $(-3,1,2)$；(2) $\sqrt{30}$；(3) 32

出處：第四冊第一章〈空間向量〉

目標：空間向量、向量外積與體積

解析：(1) $\overrightarrow{AP}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AG})=\frac{1}{2}[\overrightarrow{AE}+(\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD})]=\overrightarrow{AE}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$ ……① (1 分)

$\overrightarrow{AQ}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AD})=\frac{1}{2}\overrightarrow{AE}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$ ……………………………………………………② (1 分)

$\overrightarrow{AR}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AG})=\frac{1}{2}[\overrightarrow{AD}+(\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD})]=\frac{1}{2}\overrightarrow{AE}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$ ……③ (1 分)

解①、②、③，得

$\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{AQ}-\overrightarrow{AR}=(-1,3,6)+(0,2,3)-(2,4,7)=(-3,1,2)$

$\overrightarrow{AD}=-\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{AQ}+\overrightarrow{AR}=-(-1,3,6)+(0,2,3)+(2,4,7)=(3,3,4)$

$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AP}-3\overrightarrow{AQ}+\overrightarrow{AR}=(-1,3,6)-3(0,2,3)+(2,4,7)=(1,1,4)$

故 $\overrightarrow{AE}=(-3,1,2)$。(1 分)